И.П. Рустюмова
С.Т. Рустюмова

ТРЕНАЖЕР ПО МАТЕМАТИКЕ ДЛЯ ПОДГОТОВКИ К ЕДИНОМУ НАЦИОНАЛЬНОМУ ТЕСТИРОВАНИЮ (ЕНТ)

Часть 3

Алматы
2013

ББК 22.1я7
Р88

Рустюмова И.П., Рустюмова С.Т.

Р88 Тренажер по математике для подготовки к единому национальному тестированию (ЕНТ). Часть 3. Издание первое. - Алматы, 2013. - 516 с.

ISBN 9965-07-369-4

«Тренажер по математике» для подготовки к единому национальному тестированию (ЕНТ)" дополняет необходимым практическим материалом учебно-методическое пособие для абитуриентов в двух частях **"Пособие для подготовки к единому национальному тестированию (ЕНТ) по математике"** тех же авторов.

«Тренажер» построен таким образом, что вместе с пособием может служить полным курсом повторения алгебры и начал анализа в школе. Основу сборника составляют **более трех тысяч задач**, представленных в контрольно-измерительных материалах ЕНТ последних лет по математике. Задания имеют различные уровни сложности (А, В и С) и охватывают все основные содержательные линии курса алгебры и начал анализа. Такая структура позволяет использовать «Тренажер» для подготовки к письменному экзамену, в каком бы виде он ни проводился: выпускной экзамен в школе, Единое национальное тестирование, вступительный экзамен в ВУЗ. Сборник может быть использован для самоподготовки, а так же при проведении групповых и индивидуальных занятий.

«Тренажер» включает все темы школьного курса математики и соответствует современным образовательным стандартам и требованиям ЕНТ. Адресуется абитуриентам, учащимся старших классов, учителям и репетиторам.

$\text{Р}\frac{1602000000}{407(05)-05}$ **ББК 22.1я7**

ISBN 9965-07-369-4

ПРЕДИСЛОВИЕ

Предлагаемый Вашему вниманию «Тренажер по математике» адресован абитуриентам, изучающим алгебру и начала математического анализа в объеме программы средней школы для успешного прохождения Единого национального тестирования. Данный сборник также будет полезен учителям и репетиторам для организации подготовки учащихся к выпускному экзамену в 11-м классе и к поступлению в ВУЗ.

Основное содержание «Тренажера» составляют более трех тысяч задач для самостоятельного решения, сортированные по темам и систематизированные по методам решения и уровню сложности. На различных этапах обучения «Тренажер» поможет Вам обеспечить уровневый подход к организации повторения и осуществлять контроль и самоконтроль знаний по математике.

«Тренажер» может быть использован как для работы под руководством преподавателя, так и для самостоятельного изучения курса алгебры и начал математического анализа, так как все задачи из сборника имеют ответы, кроме того этому способствуют теоретические пояснения и разобранные решения аналогичных типов заданий в «Пособии для подготовки к единому национальному тестированию (ЕНТ) по математике» Рустюмовой И.П., Рустюмовой С.Т.

Теоретические сведения и необходимые формулы в сборнике не приводятся; предполагается, что читатель найдет их в соответствующих разделах вышеупомянутого учебно-методического пособия для подготовки к ЕНТ.

Авторы будут благодарны Вам за все замечания, которые просим присылать по адресу:

svrustjumova@mail.ru или **irina.rust@mail.ru**

ГЛАВА I. РАЦИОНАЛЬНЫЕ ФУНКЦИИ

§1. ТОЖДЕСТВЕННЫЕ ПРЕОБРАЗОВАНИЯ ЧИСЛОВЫХ ВЫРАЖЕНИЙ

БЛОК 1. Вычислите:

А

1) $3{,}7-(1{,}133:1{,}1-1{,}2):(-0{,}02)\cdot 0{,}2$

2) $\dfrac{(4{,}3-0{,}64:1{,}6)\cdot 0{,}25}{\frac{25}{16}:2{,}5+0{,}375\cdot\frac{1}{3}}$

3) $2\frac{2}{3}:1\frac{7}{9}+\frac{55}{84}:\left(\frac{43}{63}-\frac{23}{36}\right)$

4) $5\frac{5}{7}:\frac{8}{21}+1\frac{8}{13}\cdot\left(\frac{43}{56}-\frac{11}{24}\right)$

5) $\left(\frac{41}{18}-\frac{17}{36}\right)\cdot\frac{18}{65}+\left(\frac{8}{7}-\frac{23}{49}\right):\frac{99}{49}+\frac{7}{6}$

6) $\left(\frac{1}{2}+0{,}125-\frac{1}{6}\right)\cdot\left(6{,}4:\frac{80}{3}\right)+\frac{1}{8}$

7) $\left(6\frac{2}{3}+2\frac{4}{15}+5\frac{1}{2}\right):\frac{1}{15}-30:\frac{5}{28}$

8) $\left(3\frac{13}{15}-12\frac{3}{20}-5\frac{4}{45}-0{,}85\right)\cdot 3$

9) $-7{,}8-1{,}3\cdot(19{,}6:1{,}4-20)$

10) $\left(3{,}24:\frac{9}{7}-3\frac{1}{5}:1\frac{1}{3}\right):0{,}9$

11) Укажите число, обратное результату действий: $\frac{5}{14}:\frac{25}{72}\cdot\frac{7}{12}:\frac{5}{36}\cdot 2\frac{1}{12}$.

12) Обратите $\frac{53}{22}$ в периодическую дробь.

13) Обратите в обыкновенную дробь $3{,}5(72)$.

14) Найдите НОД$(42; 140; 882)$.

15) Найдите НОК$(54; 81; 135; 189)$.

16) Найдите НОК$(156; 195; 1950)$.

В

17) $80-\left(\left(\frac{4}{5}\cdot 7+0,64\right)\cdot\left(1,25\cdot 7-\frac{4}{5}\cdot 1,25\right)+31,64\right)$

18) $\left(22,385:3,7-2,9\cdot 1\frac{2}{3}\right):9\frac{11}{15}$

19) $\dfrac{45\frac{10}{63}-44\frac{25}{84}}{\frac{3}{4}-\left(2\frac{1}{3}-1\frac{1}{9}\right):4}:31$

20) $\dfrac{12\frac{4}{5}\cdot 3\frac{3}{4}-4\frac{4}{11}\cdot 4,125}{2\frac{4}{7}:\frac{3}{35}}$

21) Какой цифрой оканчивается произведение: $71\cdot 72\cdot 73\cdot \ldots \cdot 79$?

22) Найдите x из пропорции: $\dfrac{3,2}{0,(4)}=\dfrac{x}{2,1(6)}$

23) Найдите x из пропорции: $\dfrac{0,875}{0,(7)}=\dfrac{x}{3,1(6)}$.

24) Найдите x из пропорции: $\dfrac{0,(7)}{3,(1)}=\dfrac{1,875}{x}$.

25) Вычислите: $\dfrac{\left(\frac{2}{3}+0,(3)\right):0,25}{0,12(3):0,0925}$

26) Найдите 72% от числа: $\dfrac{\left(13\frac{1}{4}-2\frac{5}{27}-10\frac{5}{6}\right)\cdot 230,04+46,75}{0,01}$

27) Найдите x из пропорции: $\dfrac{3,6}{14-15\frac{1}{8}:2,2}=\dfrac{x}{1,5+2\frac{2}{3}+3,75}$.

28) Найдите число, если 3,6% его составляют: $\dfrac{3+4,2:0,1}{\left(1:0,3-2\frac{1}{3}\right)\cdot 0,3125}$.

29) Известно, что $НОД(38;b)=2$, а $НОК(38;b)=1\,216$. Найдите b.

30) Известно, что $НОД(68;b)=4$, а $НОК(68;b)=1\,292$. Найдите b.

ОТВЕТЫ:

1) 2	**2)** 1,3	**3)** 16,5	**4)** 15,5	**5)** 2
6) 0,235	**7)** 48,5	**8)** $-42\frac{2}{3}$	**9)** 0	**10)** $\frac{2}{15}$
11) $\frac{1}{9}$	**12)** $2,4(09)$	**13)** $3\frac{63}{110}$	**14)** 14	**15)** 5 670
16) 3 900	**17)** 0	**18)** 0,125	**19)** $\frac{1}{16}$	**20)** 1
21) 0	**22)** 15,6	**23)** $3\frac{9}{16}$	**24)** 7,5	**25)** 3
26) 7 200	**27)** 4	**28)** 4 000	**29)** 64	**30)** 76

<u>БЛОК 2</u>. Вычислите, применяя формулы сокращенного умножения:

А

1) $\dfrac{41^2-17^2}{37^2-21^2}-\dfrac{39^2-27^2}{45^2-21^2}$

2) $\left(5\frac{1}{3}+\frac{3}{16}\right)^2-\left(5\frac{1}{3}-\frac{3}{16}\right)^2+\left(7\frac{3}{5}+\frac{5}{38}\right)^2-\left(7\frac{3}{5}-\frac{5}{38}\right)^2$

3) $\dfrac{52^2-37^2}{57^2-32^2}+\dfrac{39^2-36^2}{45^2-30^2}$

4) $\dfrac{7,4^2-2,6^2}{11,2^2-8,8^2}$

5) $\dfrac{3,88^2+3,12^2}{2}+3,88\cdot 3,12$

6) $2,85^2+7,15^2+\dfrac{2,85\cdot 7,15}{0,5}$

7) $\left(\sqrt[3]{2}-\sqrt[3]{5}\right)\left(\sqrt[3]{4}+\sqrt[3]{10}+\sqrt[3]{25}\right)$

8) $\left(5+17^{\frac{1}{2}}\right)^{-\frac{1}{3}}:\left(5-\sqrt{17}\right)^{\frac{1}{3}}$

9) $\sqrt{\dfrac{\sqrt{56^2-46^2}}{0,25\cdot\sqrt{10}}}$

10) $\dfrac{7\left(\sqrt{5}-\sqrt{3}\right)^2}{20\left(2+\sqrt[4]{15}\right)\left(2-\sqrt[4]{15}\right)}$

11) $\sqrt[4]{\sqrt{23}-\sqrt{7}}\cdot\sqrt[4]{\sqrt{23}+\sqrt{7}}$

B

12) $0,507^3+0,493^3-0,507\cdot 0,493$

13) $\dfrac{\dfrac{57^3+63^3}{120}-57\cdot 63}{18,5^2-17,5^2}$

14) $\dfrac{\dfrac{15,1^3-10,5^3}{4,6}+15,1\cdot 10,5}{32^2-19,2^2}$

15) $\left(9^{-0,25}+\left(2\sqrt{2}\right)^{-\frac{2}{3}}\right)\left(9^{-0,25}-\left(2\sqrt{2}\right)^{-\frac{2}{3}}\right)$

16) $\sqrt{\dfrac{\left(\sqrt{13}\right)^3+\left(\sqrt{3}\right)^3}{\sqrt{13}+\sqrt{3}}-\sqrt{39}}\cdot\left(\sqrt{13}+\sqrt{3}\right)$

17) $\dfrac{6\left(\sqrt{2}-1\right)^3}{1-5\left(\sqrt{2}-1\right)^2}$

18) $\dfrac{25}{198}\cdot\sqrt{\dfrac{101^2-20^2}{125}}-\dfrac{1}{45}\cdot\sqrt{115^2-110^2}$

19) $\left(3^2+1\right)\left(3^4+1\right)\left(3^8+1\right)\left(3^{16}+1\right)\left(3^{32}+1\right)-\dfrac{1}{8}\cdot3^{64}$

20) $\left(2^2+1\right)\left(2^4+1\right)\left(2^8+1\right)\left(2^{16}+1\right)\left(2^{32}+1\right)\left(2^{64}+1\right)-\dfrac{1}{3}\cdot2^{128}$

ОТВЕТЫ:

1) 1	2) 8	3) 0,8	4) 1	5) 24,5
6) 100	7) -3	8) 0,5	9) $2\cdot\sqrt[4]{102}$	10) 0,7
11) 2	12) 0,000196	13) 1	14) 1	15) $\dfrac{1}{12}$
16) 10	17) 3	18) $\dfrac{\sqrt{5}}{6}$	19) $-\dfrac{1}{8}$	20) $-\dfrac{1}{3}$

БЛОК 3. Сократите дробь:

А

1) $\dfrac{7^8\cdot49^{-2}\cdot5^4+49\cdot125\cdot\left(\dfrac{1}{5}\right)^{-1}}{(7\cdot5)^4\cdot7^{-3}}$

2) $\dfrac{\left(3\cdot2^{20}+7\cdot2^{19}\right)\cdot52}{\left(13\cdot8^4\right)^2}$

3) $\dfrac{\sqrt[3]{3}\cdot\sqrt[4]{9}\cdot\sqrt[6]{81}}{\sqrt{3}}$

4) $\dfrac{\sqrt[8]{27}\cdot\sqrt[3]{40}\cdot\sqrt[4]{4}\cdot\sqrt[8]{3^5}}{\sqrt[6]{25}\cdot\sqrt{2}}$

5) $\dfrac{\left(8+\sqrt{56}\right)(1,5+0,25)}{\sqrt{2}\cdot\left(\sqrt{7}+\sqrt{8}\right)}$

6) $\dfrac{\left(\sqrt{45}-\sqrt{20}\right)\left(\sqrt{12}+\sqrt{75}\right)\cdot 7\sqrt{3}}{\sqrt{5}+\sqrt{180}}$

7) $\dfrac{\left(2-\sqrt{5}\right)^2}{\left(3-2\cdot\sqrt[4]{5}\right)\left(3+2\cdot\sqrt[4]{5}\right)}$

8) $\dfrac{1-2\cdot\sqrt[4]{5}+\sqrt{5}}{\left(\sqrt{3}-\sqrt[4]{45}\right)^2}$

B

9) $\dfrac{\left(\sqrt[3]{5}-\sqrt[3]{9}\right)\left(\sqrt{32}-\sqrt{8}\right)^2}{\sqrt[3]{40}-\sqrt[3]{72}}$

10) $\dfrac{\left(\sqrt{3}-\sqrt{2}\right)\cdot\sqrt{72}}{3\left(2\sqrt{6}-\sqrt{16}\right)\left(\sqrt[3]{64}+1\right)}$

11) $\dfrac{\sqrt{6}+\sqrt{3}-\sqrt{2}-1}{\sqrt{6}+2\sqrt{3}-\sqrt{2}-2}$

12) $\dfrac{\left(\sqrt{5}-\sqrt{11}\right)\left(\sqrt{33}+\sqrt{15}-\sqrt{22}-\sqrt{10}\right)}{\sqrt{75}-\sqrt{50}}$

13) $\dfrac{\left(\sqrt[3]{9}+\sqrt{3}\right)^2}{\sqrt[3]{3}+2\cdot\sqrt[6]{3}+1}$

14) $\dfrac{25^{k+1}-25^{k}}{\left(5^{k}+5^{k-1}\right)^2}$

15) $\dfrac{\left(-3^{k}-3^{k-1}\right)^2}{9^{k-1}}$

ОТВЕТЫ:

1) 350 2) $\frac{1}{8}$ 3) 3 4) 6 5) 3,5

6) 21 7) 1 8) $\frac{1}{3}$ 9) 4 10) 0,2

11) $\frac{\sqrt{2}}{2}$ 12) $-1,2$ 13) 3 14) $16\frac{2}{3}$ 15) 16

БЛОК 4. **Освободитесь от иррациональности в знаменателе дроби:**

A

1) $\frac{4}{3-\sqrt{3}}$ 2) $\frac{6}{3\sqrt{2}+4}$ 3) $\frac{4}{\sqrt{7}-\sqrt{3}}$

4) $\frac{17}{3\sqrt{5}-2\sqrt{7}}$ 5) $\frac{7}{\sqrt{5-\sqrt{11}}}$ 6) $\frac{3}{\sqrt{4-\sqrt{7}}}$

7) $\frac{11}{3\sqrt{5}+2\sqrt{7}}$ 8) $\frac{2}{\sqrt{2-\sqrt{3}}}$ 9) $\frac{1}{\sqrt[3]{3}+\sqrt[3]{5}}$

10) $\frac{1}{\sqrt[3]{3}-1}$ 11) $\frac{1}{\sqrt[3]{2}+1}$ 12) $\frac{1}{\sqrt[3]{49}-\sqrt[3]{35}+\sqrt[3]{25}}$

13) $\frac{4}{2-3\cdot\sqrt[3]{2}}$ 14) $\frac{1}{\sqrt[3]{9}-\sqrt[3]{6}+\sqrt[3]{4}}$

B

15) $\frac{1}{\sqrt[4]{3}+\sqrt[4]{2}}$ 16) $\frac{1}{\sqrt[4]{2}-1}$ 17) $\frac{6}{\sqrt{2}+\sqrt{3}+\sqrt{5}}$

18) $\left(\frac{2}{\sqrt{3}-1}+\frac{3}{\sqrt{3}-2}+\frac{6}{3-\sqrt{3}}-3\right)\cdot\frac{2}{\sqrt{3}+5}$

19) $\left(\frac{2}{\sqrt{19}+\sqrt{17}}+\frac{2}{\sqrt{17}+\sqrt{15}}+\sqrt{15}\right)\cdot\sqrt{19}$

20) $\left(\frac{12}{\sqrt{7}-1}\cdot\frac{18}{\sqrt{7}+5}-4\sqrt{7}\right)\left(\sqrt{7}+1\right)$

21) $\frac{\sqrt{2+\sqrt{3}}}{\sqrt{2-\sqrt{3}}}-\frac{\sqrt{2-\sqrt{3}}}{\sqrt{2+\sqrt{3}}}$

22) $\frac{9}{5-\sqrt{7}}-\frac{1}{\sqrt{7}+\sqrt{5}}+\frac{22}{7+\sqrt{5}}$

23) $\frac{\sqrt{5}-\sqrt{3}}{\sqrt{5}+\sqrt{3}}+\frac{\sqrt{5}+\sqrt{3}}{\sqrt{5}-\sqrt{3}}-\frac{\sqrt{5}+1}{\sqrt{5}-1}$

24) $\frac{\sqrt[3]{\left(6-\sqrt{35}\right)^2}}{\sqrt[3]{6+\sqrt{35}}}+\sqrt{35}$

25) $\frac{\sqrt[3]{\left(8-\sqrt{63}\right)^2}}{\sqrt[3]{8+\sqrt{63}}}+\sqrt{63}+2\,005$

ОТВЕТЫ:

1) $\frac{6+2\sqrt{3}}{3}$

2) $9\sqrt{2}-12$

3) $\sqrt{7}+\sqrt{3}$

4) $3\sqrt{5}+2\sqrt{7}$

5) $\frac{\sqrt{14\left(5+\sqrt{11}\right)}}{2}$

6) $\sqrt{4+\sqrt{7}}$

7) $\frac{11\left(3\sqrt{5}-2\sqrt{7}\right)}{17}$

8) $2\sqrt{2+\sqrt{3}}$

9) $\frac{1}{8}\left(\sqrt[3]{9}-\sqrt[3]{15}+\sqrt[3]{25}\right)$

10) $\frac{1}{2}\left(\sqrt[3]{9}+\sqrt[3]{3}+1\right)$

11) $\frac{1}{3}\left(\sqrt[3]{4}-\sqrt[3]{2}+1\right)$

12) $\frac{\sqrt[3]{7}+\sqrt[3]{5}}{12}$

13) $\frac{-2\left(4+6\cdot\sqrt[3]{2}+9\cdot\sqrt[3]{4}\right)}{23}$

14) $\frac{\sqrt[3]{3}+\sqrt[3]{2}}{5}$

15) $\left(\sqrt[4]{3}-\sqrt[4]{2}\right)\left(\sqrt{3}+\sqrt{2}\right)$

16) $\left(\sqrt[4]{2}+1\right)\left(\sqrt{2}+1\right)$

17) $\frac{3\sqrt{2}+2\sqrt{3}-\sqrt{30}}{2}$

18) -2

19) 19

20) 24

21) $2\sqrt{3}$

22) 6

23) $\frac{13-\sqrt{5}}{2}$

24) 6

25) 2 013

БЛОК 5. **Выполните преобразования двойных радикалов:**

А

1) $\left(3-\sqrt{2}\right)\cdot\sqrt{11+6\sqrt{2}}$

2) $\left(3-\sqrt{5}\right)\cdot\sqrt{14+6\sqrt{5}}$

3) $\left(\sqrt{7+\sqrt{33}}+\sqrt{7-\sqrt{33}}\right)^2$

4) $\sqrt{3-2\sqrt{2}}\cdot\sqrt[4]{17+12\sqrt{2}}$

5) $\sqrt{\left(\sqrt{3}-1\right)^2}+\sqrt{\left(\sqrt{3}-2\right)^2}$

6) $\sqrt{\left(2-\sqrt{5}\right)^2}+\sqrt{\left(3-\sqrt{5}\right)^2}$

7) $\sqrt{\left(\sqrt{3}-2\right)^2}-\sqrt{\left(1-\sqrt{3}\right)^2}+\sqrt{3}$

В

8) $\sqrt[6]{4-2\sqrt{3}}\cdot\sqrt[3]{1+\sqrt{3}}\cdot\sqrt[3]{4}$

9) $\sqrt[6]{\left(-\sqrt{14}+2\right)^6}+2\sqrt{14}-8$

10) $\dfrac{\sqrt{25}+8\sqrt{5}}{8+\sqrt{5}}\cdot\sqrt{9-4\sqrt{5}}$

11) $\sqrt[3]{2-\sqrt{3}}\cdot\sqrt[6]{7+4\sqrt{3}}$

12) $\left(\sqrt{3}+1\right)^2+\left(\sqrt{3}-2\right)^2+\sqrt{27}+\sqrt{4+2\sqrt{3}}+\sqrt{7-4\sqrt{3}}$

13) $\left(\sqrt{2}+3\right)^2+\left(\sqrt{2}-1\right)^2+\sqrt{8}+\sqrt{3+2\sqrt{2}}+\sqrt{11-6\sqrt{2}}$

14) $\sqrt{17-4\sqrt{9+4\sqrt{5}}}$

15) $\sqrt{15-4\sqrt{7+4\sqrt{3}}}$

ОТВЕТЫ:

1) 7	2) 4	3) 22	4) 1	5) 1
6) 1	7) $3-\sqrt{3}$	8) 2	9) $3\sqrt{14}-10$	10) $5-2\sqrt{5}$
11) 1	12) $14+\sqrt{3}$	13) $18+6\sqrt{2}$	14) $\sqrt{5}-2$	15) $2-\sqrt{3}$

<u>БЛОК 6</u>. Выполните преобразования числовых выражений, содержащих радикалы:

А

1) $\sqrt{252}-\sqrt{700}+\sqrt{1008}-\sqrt{448}$

2) $\sqrt{28}-\sqrt{1,75}-\sqrt{15,75}$

3) $2\sqrt{18}+3\sqrt{8}+3\sqrt{32}-\sqrt{50}$

4) $\sqrt{49}+\left(\sqrt{66}\right)^2-\sqrt{(-5)^2}$

В

5) $3\cdot\sqrt{\frac{1}{27}}-\frac{5}{6}\cdot\sqrt{27}-0,1\cdot\sqrt{75}+2\cdot\sqrt{\frac{1}{3}}$

6) $3\cdot\sqrt{1,44}-\left(0,3\cdot\sqrt{7}\right)^2$

7) $\left(10\sqrt{48}-6\sqrt{27}+4\sqrt{12}\right):\sqrt{3}$

8) $\left(15\sqrt{50}+5\sqrt{200}-3\sqrt{450}\right):\sqrt{10}$

9) $2\cdot\sqrt{40\sqrt{12}}+3\cdot\sqrt{5\sqrt{48}}-2\cdot\sqrt[4]{75}-4\cdot\sqrt{15\sqrt{27}}$

10) $\frac{3}{2}\cdot\sqrt{\frac{2}{3}}-3\cdot\sqrt{\frac{1}{6}}-1,7\cdot\sqrt{6}-4\cdot\sqrt{1,5}+3,7\cdot\sqrt{6}$

ОТВЕТЫ:

1) 0　2) 0　3) $19\sqrt{2}$　4) 68　5) $-2\sqrt{3}$

6) 2,97　7) 30　8) $16\sqrt{5}$　9) 0　10) 0

БЛОК 7. Выполните преобразования выражений, содержащих о · зателями:

A

1) $\left(\frac{4}{3}\right)^{-2}\cdot\left(\frac{3}{4}\right)^{3}:\left(-\frac{2}{3}\right)^{-3}\cdot\left(-\frac{1}{2}\right)^{-7}$

2) $\left(\left(\frac{2^{3}}{5}\right)^{-1}-3\cdot(-2)^{-3}+\left(\frac{7}{8}\right)^{0}\right)^{-1}$

3) $\dfrac{\left(\frac{3}{2}\right)^{-3}\cdot(3{,}375)^{-1}}{(2{,}25)^{-2}\cdot\left(\frac{2}{3}\right)^{-1}}$

4) $\dfrac{(0{,}4)^{-2}\cdot(2{,}5)^{-4}}{(0{,}16)^{-5}\cdot\left((6{,}25)^{-3}\right)^{2}}$

5) $(-2{,}2)^{5}\cdot\left(2\frac{3}{11}\right)^{4}$

B

6) $\left(20\cdot2^{4}-12\cdot2^{3}-48\cdot2^{2}\right)^{2}:(-8)^{3}$

7) $\left(75\cdot5^{2}+35\cdot5^{3}\right):(20\cdot25\cdot125-625\cdot75)$

8) $\dfrac{\left(\frac{3}{2^{3}}\right)^{-1}\cdot(1{,}5)^{3}+\left(-\frac{1}{3}\right)^{-1}}{(0{,}2)^{-1}+(-2{,}3)^{0}}$

9) $\dfrac{(-1{,}2)^{0}+(0{,}5)^{-1}}{\left(\frac{2^{3}}{5}\right)^{-1}-3\cdot(-2)^{-3}-(0{,}2)^{-2}}$

10) $\left(6-4\cdot\left(\frac{5}{16}\right)^{0}\right)^{-2}+\left(\frac{2}{3}\right)^{-1}-\frac{3}{2\sqrt{2}}\cdot\cos\frac{3\pi}{4}$

ОТВЕТЫ:

1) 9 2) 0,5 3) $\frac{8}{27}$ 4) 1 5) -1375

6) -2 7) $\frac{2}{5}$ 8) 1 9) $-0{,}125$ 10) 2,5

<u>БЛОК 8</u>. Выполните преобразования выражений, содержащих степени с ра иональными показателями·

А

1) $\left(\frac{1}{4}\right)^{-\frac{3}{2}}+3\cdot 0{,}0081^{-\frac{1}{4}}+\left(\frac{1}{16}\right)^{-0{,}75}$

2) $1\,000^{-\frac{2}{3}}+\left(\frac{1}{27}\right)^{-\frac{4}{3}}-625^{\;0{,}75}$

3) $81^{0{,}75}\cdot 32^{-0{,}4}-8^{-\frac{2}{3}}\cdot 27^{\frac{1}{3}}+256^{0{,}5}$

4) $\sqrt[3]{-5}\cdot\sqrt{8}\cdot\sqrt[3]{25}\cdot\sqrt{32}+\frac{\sqrt[5]{-729}}{\sqrt[5]{3}}$

5) $4\cdot(0{,}0025)^{-0{,}5}\cdot\sqrt[3]{0{,}001}$

6) $5\cdot\sqrt{0{,}0004}\cdot 0{,}216^{-\frac{1}{3}}$

7) $64^{\frac{1}{2}}\cdot\left(3\frac{3}{8}\right)^{-\frac{2}{3}}\cdot\sqrt{324}$

В

8) Найдите x, если $\frac{\left(\sqrt[3]{2}\right)^{6}\cdot 2^{-6}}{\left(\frac{1}{2}\right)^{2}\cdot 8^{-\frac{2}{3}}}=x\cdot\left(\frac{1}{\sqrt[3]{2}}\right)^{9}$.

9) Вычислите: $\frac{4^{-0{,}5}+\left(\sqrt{8}\right)^{\frac{2}{3}}+2\frac{1}{3}:1\frac{5}{9}}{\left(4{,}8\cdot 6\frac{2}{3}-31{,}75\right)^{-0{,}5}}$.

10) Найдите число, 10% которого равны значению выражения:

$$32^{\frac{2}{5}}\cdot 0,5-\left(\sqrt{25}\right)^{0}+\left(-\frac{1}{5}\right)^{-2}+\left(\frac{2}{3}\right)^{-4}\cdot\left(\frac{2}{3}\right)^{3}$$

11) $3^{0,3}:\dfrac{3^{-0,2}}{1-3^{0,5}}+\dfrac{2}{1-\sqrt{3}}$

12) $16^{0,75}\cdot 25^{0,5}+64^{-\frac{1}{2}}\cdot 9^{1,5}-\left(\dfrac{1}{100}\right)^{-0,5}$

13) $\sqrt{2\sqrt{2\sqrt{2}}}$

14) $0,027^{-\frac{1}{3}}-\left(-\dfrac{1}{6}\right)^{-2}+256^{0,75}-3^{-1}+10^{0}$

15) $2\cdot\sqrt[3]{54}+\sqrt[3]{16}-\sqrt[3]{250}+2\cdot\sqrt[3]{27}-\sqrt[3]{128}$

ОТВЕТЫ:

1) 26	**2)** 81,002	**3)** 22	**4)** -83	**5)** 8
6) $\frac{1}{6}$	**7)** 64	**8)** 8	**9)** 2	**10)** 275
11) -4	**12)** -6	**13)** $\sqrt[8]{2^{7}}$	**14)** 32	**15)** $6-\sqrt[3]{2}$

БЛОК 9. В . ит··

С

1) $\left(4\sqrt{6}+\sqrt{39}+2\sqrt{26}+6\right)\left(4\sqrt{6}+\sqrt{39}-2\sqrt{26}-6\right)$

2) $\left(\sqrt{28}-\sqrt{12}\right)\cdot\sqrt{10+\sqrt{84}}$

3) $\dfrac{\sqrt{97-56\sqrt{3}}+4\sqrt{3}}{\sqrt{52-30\sqrt{3}}-3\sqrt{3}}\left(\sqrt{3+2\sqrt{2}}+\sqrt{3-2\sqrt{2}}\right)$

4) $\left(15\cdot4^{-2}+\frac{2^{-4}\cdot\sqrt{11}}{121^{0,25}}\right)\cdot\left(\frac{\left(1+9^{0,25}\right)\cdot\left(\sqrt{3}-1\right)}{4}\right)^{1}$

5) $\left(2\sqrt{6}-5\right)^{2}-10\sqrt{49-20\sqrt{6}}+1$

6) $\sqrt{6}+\sqrt{5}-\frac{1}{\sqrt{11-2\sqrt{30}}}$

7) $\sqrt[3]{5\sqrt{2}-7}\cdot\sqrt{3+2\sqrt{2}}$

8) $\frac{\sqrt{21+8\sqrt{5}}}{4+\sqrt{5}}\cdot\sqrt{9-4\sqrt{5}}$

9) $\frac{\sqrt{6,3\cdot1,7}\cdot\left(\sqrt{\frac{6,3}{1,7}}-\sqrt{\frac{1,7}{6,3}}\right)}{\sqrt{(6,3+1,7)^{2}-4\cdot6,3\cdot1,7}}$

10) $\left(\frac{\sqrt{561^{2}-459^{2}}}{4\frac{2}{7}\cdot0,15+4\frac{2}{7}:\frac{20}{3}}+4\sqrt{10}\right):\frac{\sqrt{40}}{3}$

11) $\left(\frac{2}{\sqrt{7}+\sqrt{5}}+\frac{3}{\sqrt{5}-\sqrt{2}}\right)^{-2}:\left(1+\sqrt{3,5}\right)^{-2}$

12) $\left(\sqrt[6]{9+4\sqrt{5}}+\sqrt[3]{2+\sqrt{5}}\right)\cdot\sqrt[3]{\sqrt{5}-2}$

13) $\left(1+2^{0,5}\right)^{2}+\left(3+2\sqrt{2}\right)^{-1}$

14) $\left(\left(\sqrt[4]{3}-\sqrt[4]{27}\right)^{2}+7\right)\cdot\left(\left(\sqrt[4]{3}+\sqrt[4]{27}\right)^{2}-7\right)$

15) $\sqrt{13+30\sqrt{2+\sqrt{9+4\sqrt{2}}}}$

16) $\sqrt[3]{\sqrt{5}+\sqrt[4]{52}}\cdot\sqrt[3]{5+2\sqrt{13}}\cdot\sqrt[3]{\sqrt[4]{52}-\sqrt{5}}$

17) $\dfrac{\sqrt{12-2\sqrt{11}}}{\sqrt{17-12\sqrt{2}}}-\dfrac{\sqrt{12+2\sqrt{11}}}{\sqrt{17+12\sqrt{2}}}$

18) $7\,521^2-7\,522\cdot 7\,520$

19) $\sqrt[4]{\left(\sqrt{5}-3\right)^4}-3\sqrt{5}+7$

20) $\dfrac{1}{2\cdot 5}+\dfrac{1}{5\cdot 8}+\dfrac{1}{8\cdot 11}+\dfrac{1}{11\cdot 14}+\dfrac{1}{14\cdot 17}$

ОТВЕТЫ:

1) -5	2) 8	3) $-\dfrac{14\sqrt{2}}{5}$	4) 2	5) 0
6) 0	7) 1	8) $\sqrt{5}-2$	9) 1	10) 125
11) $\dfrac{1}{2}$	12) 2	13) 6	14) 47	15) $5+3\sqrt{2}$
16) 3	17) $4\sqrt{22}-6$	18) 1	19) $10-4\sqrt{5}$	20) $\dfrac{5}{34}$

§ 2. ТОЖДЕСТВЕННЫЕ ПРЕОБРАЗОВАНИЯ РАЦИОНАЛЬНЫХ АЛГЕБРАИЧЕСКИХ ВЫРАЖЕНИЙ

БЛОК 1. Вы р ж ние многочлена на множители:

А

1) $x^3+x^2y+xy^2+y^3$

2) $x^3-2x^2y+y^2x-2y^3$

3) $x^4y^2+2x^4+x^2y^2+2x^2$

4) $2x^2+7x-4$

5) $4x^2+y-2x-y^2$

6) $x^2-9x+9y-y^2$

7) $3ax-2-x+6a$

8) $4xy-3-2y+6x$

9) $4x^2+5x-9x^2+15x$

10) $2x^2-7x+5$

11) $6x^2-11x-30$

12) $4x^2-4y^2+3x+3y$

13) $10x^2-3x-4$

14) $2x+y+y^2-4x^2$

В

15) $5x^2y-4xy^2-y^3$

16) $x^2y-4xy^2-5y^3$

17) $a^3+6a^2+12a+8$

18) $4a^2-12ab+5b^2$

19) $b^6+b^4c^2-b^2-c^2$

20) $9x^2+6xy+y^2-z^2$

21) $(x+1)^3-3(x+1)^2+3(x+1)-1$

22) $a-3b+9b^2-a^2$

23) $x^2+y^2+4+2xy+4x+4y$

24) $2a^4+30a^3+150a^2+250a$

25) $64(2-5a)^2-25(6a-5)^2$

ОТВЕТЫ:

1) $\left(x^2+y^2\right)(x+y)$

2) $\left(x^2+y^2\right)(x-2y)$

3) $x^2\left(x^2+1\right)\left(y^2+2\right)$

4) $(x+4)(2x-1)$

5) $(2x-y)(2x+y-1)$

6) $(x-y)(x+y-9)$

7) $(x+2)(3a-1)$

8) $(2x-1)(2y+3)$

9) $5x(4-x)$

10) $(x-1)(2x-5)$

11) $(3x-10)(2x+3)$

12) $(x+y)(4x-4y+3)$

13) $(2x+1)(5x-4)$

14) $(2x+y)(1+y-2x)$

15) $y(x-y)(5x+y)$

16) $y(x+y)(x-5y)$

17) $(a+2)^3$

18) $(2a-b)(2a-5b)$

19) $\left(b^2+c^2\right)\left(b^2+1\right)(b+1)(b-1)$

20) $(3x+y+z)(3x+y-z)$

21) x^3

22) $(1-3b-a)(a-3b)$

23) $(x+y+2)^2$

24) $2a(a+5)^3$

25) $(10a+9)(70a-41)$

БЛОК 2. Сократите дробь:

А

1) $\dfrac{x^2-x-2}{3x^2-5x-2}$

2) $\dfrac{x^3+4x^2-9x-36}{x^2+x-12}$

3) $\dfrac{5x^2-7x-5xy+7y}{x-y}$

4) $\dfrac{a^4-1}{1-a^8}$

5) $\dfrac{x^4+a^3x}{x^3-ax^2+a^2x}$

6) $\dfrac{1+ab-a-b}{1-2a+a^2}$

7) $\dfrac{xy-y+2x-2}{xy+3x-y-3}$

8) $\dfrac{x^2-9x+14}{x^2-10x+16}$

9) $\dfrac{7x^2y^4+7x^4y^2}{x^6+y^6}$

B

10) $\dfrac{x^4+x^2+1}{x^2+x+1}$

11) $\dfrac{a^{36}-a^3}{a^{26}+a^{15}+a^4}$

12) $\dfrac{a^2+b^2-c^2-2ab}{a^2-b^2+c^2+2ac}$

13) $\dfrac{x^6-1}{3x^3-3x}$

14) $\dfrac{m^2-n^2-2np-p^2}{m^2-2mn+n^2-p^2}$

15) $\dfrac{a^3-2a^2+4a-3}{a^2-7a+6}$

16) $\dfrac{x+y+x^2-y^2}{x-y+x^2-2xy+y^2}$

17) $\dfrac{ab+b+az+z}{a^3+3a^2+3a+1}$

18) $\dfrac{x^3+2x^2+4x+3}{x^2+7x+6}$

19) $\dfrac{x^4+x^2y^2+y^4}{x^2-xy+y^2}$

20) $\dfrac{x^4+x^2y^2+y^4}{(x-y)(x^3-y^3)}$

ОТВЕТЫ:

1) $\dfrac{x+1}{3x+1}$

2) $x+3$

3) $5x-7$

4) $-\dfrac{1}{1+a^4}$

5) $x+a$

6) $\dfrac{1-b}{1-a}$

7) $\frac{y+2}{v+3}$

8) $\frac{x-7}{x-8}$

9) $\frac{7x^2y^2}{x^4-x^2y^2+y^4}$

10) x^2-x+1

11) $\frac{a^{11}-1}{a}$

12) $\frac{a-b-c}{a+b+c}$

13) $\frac{x^4+x^2+1}{3x}$

14) $\frac{m+n+p}{m-n+p}$

15) $\frac{a^2-a+3}{a-6}$

16) $\frac{x+y}{x-y}$

17) $\frac{b+z}{(a+1)^2}$

18) $\frac{x^2+x+3}{x+6}$

19) x^2+xy+y^2

20) $\frac{x^2-xy+y^2}{(x-y)^2}$

<u>БЛОК 3</u>. Выполните преобразования дробных выражений:

А

1) $\frac{m^4-49}{m^2+7}-\frac{m^6-343}{m^4+7m^2+49}$

2) $\left(\frac{1+n}{n^2-mn}-\frac{1-m}{m^2-mn}\right)\cdot\left(\frac{m+n}{m^2n-n^2m}\right)^{-1}$

3) $\left(\frac{ab}{a-b}+a\right)\left(\frac{ab}{a+b}-a\right):\frac{a^2b^2}{b^2-a^2}$

4) $\frac{(a+b)^2-(ab+1)^2}{a^2-1}:0,75$ и вычислите при $b=-0,5$

5) $\left(\frac{2ab}{a^2-b^2}+\frac{a-b}{2(a+b)}\right)\cdot\frac{2a}{a+b}-\frac{b}{a-b}$

6) $\frac{3x+2}{2x+3}-\frac{4x-1}{2x+3}+\frac{2x^2+3x}{4x^2+12x+9}$ и вычислите при $x=3$

7) $\frac{6}{7(x-3)}-\frac{1}{x^2-6x+9}+\frac{1}{x^2-9}$ и вычислите при $x=4$

8) $\frac{3a-4}{a+1}+\frac{a}{a+1}:\frac{a}{a^2-1}+\frac{5-2a}{a+1}$

9) $\left(\frac{1}{a^2}+\frac{1}{b^2}-\frac{1}{ab}\right):\left(\frac{a^2}{b}+\frac{b^2}{a}\right)$

10) $\left(\frac{m^3+n^3}{m^2-n^2}-\frac{m^2-n^2}{m+n}\right)\cdot(mn)^{-1}$

11) $\left(\frac{6}{a-3}-\frac{3}{a-1}-\frac{a+1}{a^2-4a+3}\right)\cdot\left(\frac{a+1}{a-3}\right)^{-1}$

12) $\frac{3a^2+2ax-x^2}{(3x+a)(a+x)}+10\cdot\frac{ax-3x^2}{a^2-9x^2}$

13) $\frac{(a+b)^2-3ab}{a^3+a^2b+ab^2+b^3}\cdot\frac{a^4-b^4}{a^3+b^3}$

14) $\frac{m^2-9}{m^2-1}:\frac{m^2+4m+3}{m^2-4m+3}$

15) $\frac{x}{x^2+y^2}-\frac{y(x-y)^2}{x^4-y^4}$

16) $\frac{a^4-b^4}{(a+b)^2-2ab}$ и вычислите при $a=2{,}71$; $b=1{,}29$

17) $\frac{x^4-4}{x^2+2}+2\left(x+\frac{3}{2}\right)$

18) $\left(a+1+\frac{1}{a-1}\right):\frac{a^2}{1-2a+a^2}$

19) $\left(\frac{b}{a^2-ab}-\frac{1}{a-b}\right):\left(\frac{a+b}{a^2-ab}-\frac{b}{ab-b^2}\right)$

20) $\frac{x}{x-y}+\frac{x^2+y^2}{y^2-x^2}+\frac{x}{x+y}$

21) $\left(\frac{m-2}{m+2}-\frac{m+2}{m-2}\right):\frac{8m}{m^2-4}$

22) $(a+b)\cdot\left(\frac{1}{a}-\frac{1}{b}\right):\frac{a^2-b^2}{a^2b^2}$

23) $\left(\frac{ab}{a^2-b^2}-\frac{b}{2a-2b}\right):\frac{2b}{a^2-b^2}$

B

24) $\left(\frac{1}{2-6a}+\frac{1}{27a^3-1}:\frac{1+3a}{1+3a+9a^2}\right)\cdot\frac{2+6a}{a}$

25) $\frac{8-n^3}{2+n}:\left(2+\frac{n^2}{2+n}\right)-\frac{n^2}{n-2}\cdot\frac{4-n^2}{n^2+2n}$

26) $\left(\frac{12}{5a^2+a-4}-\frac{a+1}{3(5a-4)}\right)\cdot\left(\frac{15a-12}{a+7}\right)$

27) $\left(\frac{x+5}{(x-9)(x+9)}+\frac{x+7}{(x-9)^2}\right)\cdot\left(\frac{x-9}{x+3}\right)^2+\frac{7+x}{9+x}$

28) $\left(\frac{a^2}{a+b}-\frac{a^3}{a^2+2ab+b^2}\right):\left(\frac{a}{a+b}-\frac{a^2}{a^2-b^2}\right)$ и вычислите при $a=-2,5$; $b=0,5$

29) $\left(\frac{49}{a^3+27}-\frac{a+3}{a^2+9-3a}\right)\cdot\frac{a(a^3+27)}{16-a^2}+\frac{4-9a-a^2}{a+4}$

30) $(x+1)\cdot\left(\frac{1}{x+1}+\frac{4}{x^2-4x}-\frac{5}{x^2-3x-4}\right):\left(1-\frac{1}{x}\right)$

31) $\left(\frac{2}{a}-\frac{a}{4}-\frac{3}{2a}+\frac{1}{2a}\right):\frac{2-a}{4}-\left(1+\frac{2}{a}\right)$ и вычислите при $a=\sqrt[3]{163}$

32) $\left(\frac{8}{2a^2-8a}-\frac{3a+32}{a^3-64}\right):\frac{a-8}{a^3+4a^2+16a}-\frac{4}{4-a}$

33) $\frac{4a^2-1}{a^2-1}:\left(\frac{a}{a^2-2a+1}+\frac{a}{a^2-1}-\frac{2}{a+1}\right)$

34) $\frac{\left(x^2+5\right)^2+4\left(x^2+5\right)+4}{x^2-10x+21}\cdot\frac{2x^2-18}{\left(x^2+7\right)^2}$

35) $\frac{y^2+18y+77}{y^2-49}\cdot\frac{5y-35}{(y+8)^2+6(y+8)+9}$

36) $\left(\frac{1}{(2-a)^2}-\frac{2}{a^2-4}+\frac{1}{(2+a)^2}\right)\cdot\left(a^2-4\right)^2$

37) $\frac{1}{(a-b)(a-c)}+\frac{1}{(b-c)(b-a)}+\frac{1}{(c-a)(c-b)}$

38) $\left(x^2-y^2-z^2+2yz\right):\frac{x+y-z}{x+y+z}$

39) $\left(\frac{2x+1}{x+2}-\frac{4x+2}{4-x^2}\right):\frac{2x+1}{x-2}+\frac{2}{x+2}$

40) $\left(\frac{9}{x^2-9}+\frac{3}{(3-x)^2}\right):\frac{6}{(x-3)^2}+\frac{1-2x}{3+x}$

ОТВЕТЫ:

1) 0 2) -1 3) $\left(\frac{a}{b}\right)^2$ 4) 1

5) 1 6) $\frac{1}{3}$ 7) 0 8) a

9) $\frac{1}{ab(a+b)}$ 10) $\frac{1}{m-n}$ 11) $\frac{2}{a-1}$ 12) 3

13) $\frac{a-b}{a+b}$ 14) $\left(\frac{m-3}{m+1}\right)^2$ 15) $\frac{1}{x+y}$ 16) 5,68

17) $(x+1)^2$ 18) $a-1$ 19) $\frac{b-a}{b}$ 20) 1

21) -1 22) $-ab$ 23) $\frac{a-b}{4}$ 24) $-\frac{1}{a}$

25) 2 26) $\frac{5-a}{a+1}$ 27) 1 28) 3,75

29) 1 30) 1 31) 0 32) 1

33) $\frac{(2a+1)(a-1)}{2}$ 34) $\frac{2x+6}{x-7}$ 35) $\frac{5}{y+11}$ 36) 16

37) 0 38) $(x+z)^2-y^2$ 39) 1 40) $-\frac{2}{x+3}$

БЛОК 4. Выполните преобразования алгебраических выражений, содержа их модули:

А

1) $f(x)=|x-2|+7-x$, если $x \geq 2$.

2) Упростите $\frac{a^2-4}{|a|+2}$, при $a \in (-\infty; 0)$.

В

3) $f(x)=|3x+1|+|4x-3|-7x$, если $x > \frac{3}{4}$.

4) $f(x)=|3x+1|+|4x-3|-7x$, если $-\frac{1}{3} \leq x \leq \frac{3}{4}$.

5) $f(x)=|x|+|2-x|+3\cdot|x-3|$, если $0 < x < 2$.

6) Дана функция $f(x)=|x-2|$. Найдите $f(-3)$.

7) Упростите $\dfrac{a^3+a^2-2a}{a\cdot|a+2|-a^2+4}$, при $a\in(-\infty;-2)$.

8) Сократите $\dfrac{x\cdot|x-3|}{x^2-x-6}$.

9) Укажите наименьшее значение функции $y=|x-2|+|x-3|$.

10) Укажите наименьшее значение функции $y=|x|+|x-2|$.

ОТВЕТЫ:

1) 5 **2)** $-a-2$ **3)** -2 **4)** $-8x+4$ **5)** $11-3x$ **6)** 5 **7)** $-\dfrac{a}{2}$

8) $\begin{cases}\dfrac{x}{x+2}, \text{ если } x>3\\ \dfrac{-x}{x+2}, \text{ если } x<3,\ x\neq-2\end{cases}$

9) 1 **10)** 2

<u>БЛОК 5</u>. Выполните преобразования выражений, содержащих степени с елыми показателями:

А

1) $(a+b)^{-1}\cdot\dfrac{a^{-2}+b^{-2}}{a^{-1}+b^{-1}}:\left(\dfrac{ab}{a^2+b^2}\right)^{-1}\cdot\left(\dfrac{2ab}{a+b}\right)^{-1}$

2) $\left(a^{-2}-b^{-2}\right)\cdot\left(b^{-1}-a^{-1}\right)^{-1}$

3) $\dfrac{x^{-2}-y^{-2}}{x^{-1}+y^{-1}}:\dfrac{x^{-1}\cdot y^{-1}}{(y-x)^{-1}}$

4) $\dfrac{a^3 b^{-1} - a^{-1} b^3}{a b^{-1} + a^{-1} b} \cdot \left(\dfrac{a^2 - b^2}{a b} \right)^{-1}$

5) $\dfrac{a^{-2} b^3 - a}{\dfrac{1}{a^3 b^{-2}} + a^{-2} b + a^{-1}}$

В

6) $\left(\dfrac{a^{-1} - b^{-1}}{a^{-3} + b^{-3}} : \dfrac{a^2 b^2}{(a+b)^2 - 3ab} + 1 \right)^{-1} - 0,5$

7) $\dfrac{m^{-2} n^{-1} - m^{-1} n^{-2}}{m^{-2} - n^{-2}} - \dfrac{1}{m}\left(m n^{-1} + 2 + m^{-1} n \right)^{-1}$ и вычислите при $m = 0,003$; $n = 0,007$

8) $\left(\dfrac{a^{-1} - b^{-1}}{a^{-1} + b^{-1}} - \dfrac{a^{-1} + b^{-1}}{a^{-1} - b^{-1}} \right) \cdot \left(\dfrac{4ab}{b^2 - a^2} \right)^{-1}$

9) $\left(x^2 - a^{-1} x + a^{-2} \right) \cdot \left(x^{-1} + a \right) - x \cdot (a x)^{-2}$

10) $\dfrac{a^{-1} - x^{-1}}{a^{-3} + x^{-3}} : \left(\dfrac{x a^{-2} + a x^{-2}}{x - a} \right)^{-1}$

11) $\dfrac{\left(x y^{-1} + y x^{-1} + 1 \right) \cdot \left(x^{-1} - y^{-1} \right)^2}{x^2 y^{-2} + y^2 x^{-2} - x y^{-1} - y x^{-1}}$ и вычислите при $x = 0,24$; $y = \dfrac{5}{12}$

12) $\dfrac{\left(a b^{-3} - a^{-3} b \right)^{-1} \cdot \left(a^{-2} + b^{-2} \right)}{\left(b^{-2} - a^{-2} \right)^{-1}}$

13) $\dfrac{\left(a^{-1} b^2 + a^3 b^{\ 4} \right)^2}{b^3 a^{-4} + 2 b^{-3} + a^4 b^{-9}}$ и вычислите при $a = -10$; $b = 2$

14) $\dfrac{a^{-1}-27b^3a^{-4}}{a^{-1}+3a^{-2}b+9a^{-3}b^2}$ и вычислите при $b=-4$; $a=\dfrac{2}{3}$

15) $\left(2a^{-3}-b^{-2}\right)\cdot\left(\dfrac{a^{-3}}{2^{-1}}+\dfrac{1}{b^2}\right)\cdot\left(\dfrac{1}{b^4}+4a^{-6}\right)$ и вычислите при $a=b=\sqrt{2}$

ОТВЕТЫ:

1) $\dfrac{1}{2ab(a+b)}$ 2) $-\dfrac{a+b}{ab}$ 3) 1 4) ab 5) $a(b-a)$

6) $\dfrac{a}{2b}$ 7) 30 8) -1 9) ax^2 10) 1

11) 10 12) $\dfrac{1}{ab}$ 13) 200 14) 19 15) $\dfrac{3}{16}$

<u>БЛОК 6</u>. Упростите:

С

1) $\left(\dfrac{x}{x-2}-\dfrac{x^2}{x^3+8}\cdot\dfrac{x^2-2x+4}{x-2}\right):\dfrac{8}{(x+2)^2-8x}-\dfrac{x^2+x+6}{4x+8}$

2) $a^{-5}\cdot\left(\dfrac{25-4a^{-4}}{5a^{-1}+2a^{-3}}-\dfrac{1-1{,}5a^{-2}-a^{-4}}{a^{-1}+0{,}5a^{-3}}\right)^5$

3) $\dfrac{x^2+x-56}{0{,}5x+4}-\dfrac{3x^2-x-14}{x+2}-\dfrac{6+7x-5x^2}{5x+3}$

4) $\dfrac{x^2+x-20}{x-4}-\dfrac{2x^2-5x+3}{2x-3}-\dfrac{4-8x-5x^2}{x+2}$

5) $\dfrac{\left(x^2-x-5\right)\left(x^2-x-2\right)+2}{\left(x^2-x-5\right)\left(x^2-x-1\right)+4}$

6) $\dfrac{x(x+1)(x+2)(x+3)}{(x-1)(x+4)}$, если $x=\dfrac{\sqrt{5}-3}{2}$

7) $\dfrac{(1-x)(x+2)}{x^2(x+1)^2}$, если $x=\dfrac{\sqrt{3}-1}{2}$

8) $\dfrac{6x+7}{2x+3}-\dfrac{2x+8}{3x+7}\cdot\left(\dfrac{x+4}{2x^2+x-3}-\dfrac{2x+3}{x^2+3x-4}\right)$

9) $\dfrac{\sqrt{a^4-6a^3+9a^2}+\sqrt{4a^4-4a^3+a^2}}{\sqrt{a^2+4a+4}}$, если $\dfrac{1}{2}<a<3$

10) $\left(\dfrac{1+6ac}{8c^3-a^3}-\dfrac{1}{2c-a}\right)\cdot\left(\dfrac{1}{a^3-8c^3}-\dfrac{1}{a^2+2ac+4c^2}\right)^{-1}$

11) $\left(\dfrac{x^2-2x+4}{4x^2-1}\cdot\dfrac{2x^2+x}{x^3+8}-\dfrac{x+2}{2x^2-x}\right)\cdot\left(\dfrac{4(x+1)}{x^2+2x}\right)^{-1}-\dfrac{6-6x}{3-6x}$

12) $\dfrac{x^4-(x-1)^2}{(x^2+1)^2-x^2}+\dfrac{x^2-(x^2-1)^2}{x^2(x+1)^2-1}+\dfrac{x^2(x-1)^2-1}{x^4-(x+1)^2}$

13) $\left(\dfrac{x^2}{y^2}-2+\dfrac{y^2}{x^2}\right)\cdot\dfrac{x^4y^4}{xy+y^2}\cdot\dfrac{\dfrac{x}{y}-1+\dfrac{y}{x}}{x^3-2x^2y+xy^2}$

14) $\dfrac{\sqrt{a^2-2ab+b^2}}{\sqrt{a^2+2ab+b^2}}+\dfrac{2a}{a+b}$, если $0<a<b$

15) $\dfrac{1}{x(x+1)}+\dfrac{1}{(x+1)(x+2)}+\dfrac{1}{(x+2)(x+3)}+\dfrac{1}{(x+3)(x+4)}$

16) $\dfrac{x^4-3x^2+1}{x^3-27}:\dfrac{x^2+x-1}{x^2+3x+9}$

17) $\left(\frac{3}{a+2}+\frac{a+1}{a^2-9}-\frac{a-1}{a^2+5a+6}\right):\frac{3a^2+7a-28}{a^2+5a+6}$

18) $\left(\frac{9}{(x+3)^2}+\frac{18}{x^2-9}+\frac{9}{(x-3)^2}\right)\cdot\left(\frac{x}{3}-\frac{3}{x}\right)^2$

19) Найдите наименьшее значение выражения:

$$(x-1)(x-2)(x-3)(x-4)+10.$$

20) Найдите наименьшее значение выражения:

$$(x-1)(x-3)(x-4)(x-6)+10.$$

ОТВЕТЫ:

1) $-\frac{3}{4}$ 2) 1 024 3) -9 4) $5x+4$

5) $\frac{x^2-x-4}{x^2-x-3}$ 6) 0,2 7) 6 8) 3

9) a 10) $2c-a-1$ 11) -1 12) 1

13) x^3+y^3 14) 1 15) $\frac{4}{x^2+4x}$ 16) $\frac{x^2-x-1}{x-3}$

17) $\frac{1}{a-3}$ 18) 4 19) 9 20) 1

§ 3. РЕШЕНИЕ РАЦИОНАЛЬНЫХ АЛГЕБРАИЧЕСКИХ УРАВНЕНИЙ

БЛОК 1. Решите рациональные уравнения:

А

1) $(x-5)^2+(3-x)^2-4(x+5)(3-x)-48=(x+1)^2$

2) $\left(1-\frac{1}{x-1}\right)(1-x)=0$

3) $\frac{x}{2}+\frac{2}{x}=\frac{x}{3}+\frac{3}{x}$

4) $\frac{(x^2-4x+4)(2x+5)}{12-3x^2}=0$

5) $\frac{5x^2+9}{6}-\frac{4x^2-9}{5}=3$

6) $(3x-8)^2-(4x-6)^2+(5x-2)(5x+2)=96$

7) $\frac{x^2+3x}{2}=\frac{x+7}{4}$

8) $\frac{x^2-3x}{7}+x=1$

9) $(3x-5)^2-(2x-1)^2=24$

10) $(3x-8)(7x+5)=(3x-8)^2$

11) $\frac{4x^2-7x-2}{x^2-5x+6}=0$

12) $\frac{(2x+1)^2}{8}-\frac{4x-1}{5}=1$

13) $\dfrac{x^2-8x+16}{x^2-x-12}=0$

14) Сколько общих точек имеют графики функций: $y=x^2-4$ и $y=x+1$.

В

15) $(x-4)(x^2+4x+16)=-189$

16) $6(x+1)^2+2(x-1)(x^2+x+1)-2(x+1)^3=32$

17) $(x+2)(x^2-2x+4)-x(x-3)(x+3)=26$

18) $3x^4+x^3-12x^2-4x=0$

19) $2x^4+3x^3-8x^2-12x=0$

20) $x^5-2x^4+x^3-2x^2+x-2=0$

21) $x^5+x^4-6x^3-6x^2+8x+8=0$

22) $2x^3+7x^2+7x+2=0$

23) $x^3-5x^2-5x+1=0$

24) $(x-1)^3=x(x+2)^2-9$

25) При каком отрицательном значении k трехчлен $10x^2+kx+40$ является полным квадратом?

ОТВЕТЫ

1) -3; 5

2) 2

3) $\pm\sqrt{6}$

4) $-2{,}5$

5) решений нет

6) ± 2

7) $-3{,}5$; 1

8) $-2\pm\sqrt{11}$

9) 0; $5{,}2$

10) $-3\frac{1}{4}$; $2\frac{2}{3}$

11) $-\frac{1}{4}$

12) $-0{,}9$; $1{,}5$

13) нет решений

14) 2

15) -5

16) 5

17) 2

18) $-\frac{1}{3}$; 0; ± 2

19) $-1,5$; ± 2; 0

20) 2

21) -1; ± 2; $\pm\sqrt{2}$

22) -2; -1; $-\frac{1}{2}$

23) -1; $3 \pm 2\sqrt{2}$

24) $-\frac{8}{7}$; 1

25) $k = -40$

БЛОК 2. Ре е др бно-рациональные уравнения:

А

1) Решите уравнение $\frac{1}{x-5} - \frac{1}{x} = 1$, в ответе укажите сумму корней.

2) $x - 2 = \frac{4x-14}{x-3}$

3) $\frac{4}{x^2+4} + \frac{5}{x^2+5} = 2$

4) $\frac{3-7x}{2x+4} = \frac{1,5-3,5x}{x+2}$

5) $\frac{2}{x} + \frac{x^2+8}{x^2-4x} = \frac{6}{x-4}$

6) $\frac{x}{x-2} + \frac{5}{x+2} = \frac{8}{x^2-4}$

7) $\frac{3x+4}{x^2-2x} + \frac{1}{x-2} = \frac{3x-2}{x}$

В

8) $\frac{x}{x+1} + \frac{x+1}{x+2} + \frac{x+2}{x} = 3$

9) $\frac{2}{x^2-4} - \frac{1}{x^2-2x} + \frac{x-4}{x^2+2x} = 0$

10) $\frac{4}{x^2-16} - \frac{1}{(x+4)^2} = \frac{10}{x^3-4x^2-16x+64}$

11) $\frac{3}{4x-20}+\frac{15}{50-2x^2}+\frac{7}{6x+30}=0$

12) $\frac{\left(x^2+35\right)^2}{\left(x^2-49\right)^2}=\frac{144x^2}{\left(49-x^2\right)^2}$

13) $\frac{x^2+3x-3}{x^3-1}+\frac{2x-1}{x^2+x+1}=\frac{1}{x-1}$

14) $1+\frac{6}{x-1}=\frac{5-2x}{x-7}+\frac{6(2x-5)}{x^2-8x+7}$

15) $1-\frac{10}{x+3}=\frac{50}{x^2+x-6}-\frac{2}{x-2}$

16) $\frac{7}{x+1}-\frac{x+4}{2-2x}=\frac{3x^2-38}{x^2-1}$

17) $\frac{30}{x^2-1}-\frac{13}{x^2+x+1}=\frac{7+18x}{x^3-1}$

18) $\frac{x}{x-1}+\frac{3x}{x^2-3x+2}=\frac{6}{x-2}$

19) $\frac{x+3}{4x^2-9}-\frac{3-x}{(2x+3)^2}=\frac{2}{2x-3}$

20) $\frac{x+1}{x+3}+\frac{10x}{x^2+x-6}=\frac{4}{x-2}$

ОТВЕТЫ

1) 5　　**2)** 4; 5　　**3)** 0

4) x - любое действительное число, кроме (-2)

5) нет решений　　**6)** -9　　**7)** 4

8) $-\frac{4}{3}$ 9) 3 10) -6; $\frac{20}{3}$ 11) нет решений

12) ± 5 13) -1; 1,5 14) 0 15) 10

16) $-2,2$; 6 17) -4; 9 18) 3 19) -6; 0

20) -7

<u>БЛОК 3</u>. Решите уравнения методом введения новой переменной:

А

1) $\frac{3x+2}{x}+\frac{5x}{2(3x+2)}=\frac{7}{2}$

2) $\frac{x-5}{x+1}+4\cdot\frac{x+1}{x-5}=5$

3) $(3x-2)^2+5(3x-2)-6=0$

4) $3x^4-13x^2+4=0$

5) $\frac{x+3}{x-3}+\frac{x-3}{x+3}=\frac{10}{3}$

6) $\frac{x^2+1}{x}-\frac{x}{x^2+1}=\frac{3}{2}$

7) $\frac{x^2+2x+3}{x}-\frac{6x}{x^2+2x+3}=5$

8) $(x^2-8)^2+4(x^2-8)-5=0$

9) $16(x-5)^4+4(5-x)^2=0$

10) $x^4-7x^2-144=0$

11) $(2x^2+3x)^2-7(2x^2+3x)=-10$

12) $\frac{2x-6}{3x-4}+\frac{3x-4}{2x-6}=\frac{17}{4}$

13) $(x^2+x-1)(x^2+x+2)=40$

14) $\frac{7}{(x^2+x+1)^2}-\frac{8}{x^2+x+1}+1=0$

15) $\frac{12}{x^2+2x}-\frac{3}{x^2+2x-2}=1$

16) $x^8+9x^4+8=0$

17) $\left(x+\frac{8}{x}\right)^2+x=42-\frac{8}{x}$

B

18) $\left(x^2+3x\right)^2-14x^2-42x+40=0$

19) $(x-3)(x-4)(x+1)(x+2)=336$

20) $x(x-2)(x+3)(x+1)=72$

21) $\left(x^2+6\right)^2+\left(x^2+6\right)\left(x^2+1\right)-6\left(x^2+1\right)^2=0$

22) $\left(x^2+5\right)^2-5\left(x^2+5\right)\left(x^2+2\right)+6\left(x^2+2\right)^2=0$

23) $\frac{1}{x(x+2)}+\frac{1}{(x+1)^2}=\frac{7}{12}$

24) $\frac{1}{x(x+6)}-\frac{1}{(x+3)^2}=-\frac{9}{20}$

25) $\frac{x^2-x}{x^2-x-1}-\frac{x^2-x+2}{x^2-x-2}=1$

26) $(x+1)(x+3)(x+5)(x+7)=-15$

27) $\frac{24}{x^2+2x-8}-\frac{15}{x^2+2x-3}=2$

28) $(3x-1)^2-3(3x-1)(2x+5)+2(2x+5)^2=0$

29) $(2x+1)^2+3(2x+1)(3x-4)-4(3x-4)^2=0$

30) $\left(x^2+2x\right)^2-x^2-2x=56$

31) $\dfrac{x^2+2x+1}{x^2+2x+2}+\dfrac{x^2+2x+2}{x^2+2x+3}=\dfrac{7}{6}$

32) $(x-2)(x-3)^2(x-4)=20$

33) $x(x+3)(x+5)(x+8)+56=0$

34) $5x^4-3x^3-4x^2-3x+5=0$

35) $x^4+x^3-4x^2+x+1=0$

36) $\dfrac{3}{x^2-4x+1}-x^2=3-4x$

37) $x^4-5x^3+6x^2-5x+1=0$

38) $(x-3)^4+(x+1)^4=256$

39) $(x-1)x(x+1)(x+2)=24$

40) $(6-x)^4+(8-x)^4=16$

ОТВЕТЫ

1) $-4;\ -1$

2) -3

3) $-\dfrac{4}{3};\ 1$

4) $\pm 2;\ \pm\dfrac{1}{\sqrt{3}}$

5) ± 6

6) 1

7) $1;\ 3$

8) $\pm\sqrt{3};\ \pm 3$

9) 5

10) ± 4

11) $-2{,}5;\ -2;\ 0{,}5;\ 1$

12) $1;\ 4$

13) $-3;\ 2$

14) $-3;\ -1;\ 0;\ 2$

15) $-4;\ -3;\ 1;\ 2$

16) решений нет

17) $2;\ 4;\ \dfrac{-7\pm\sqrt{17}}{2}$

18) $-5;\ -4;\ 1;\ 2$

19) $-4;\ 6$

20) $-4;\ 3$

21) ± 2

22) ± 1

23) -3; 1; $\dfrac{-7 \pm \sqrt{21}}{7}$

24) -5; -1; $-3 \pm \sqrt{5}$

25) 0; 1

26) -6; -2; $-4 \pm \sqrt{6}$

27) -2; 0; $\dfrac{-2 \pm \sqrt{66}}{2}$

28) -11; 6

29) $1\frac{1}{14}$; 5

30) -4; 2

31) -2; 0

32) $3 \pm \sqrt{5}$

33) -7; -1; $-4 \pm 2\sqrt{2}$

34) 1

35) 1; $\dfrac{-3 \pm \sqrt{5}}{2}$

36) 0; 2; 4

37) $2 \pm \sqrt{3}$

38) -1; 3

39) -3; 2

40) 6; 8

<u>БЛОК 4</u>. Решите уравнения:

С

1) $\dfrac{30x}{2x^2+2x+1} - \dfrac{16x}{2x^2+x+1} = 2$ *Замена*: $a = 2x + \dfrac{1}{x} + 1$

2) $\dfrac{15x}{x^2+2x+2} - \dfrac{8x}{x^2+x+2} = 1$

3) $\dfrac{1}{x-9} + \dfrac{1}{x-7} = \dfrac{1}{x+18} + \dfrac{1}{x-10}$

4) $\dfrac{1}{x+10} - \dfrac{1}{x-1} = \dfrac{1}{x+8} - \dfrac{1}{x-3}$

5) $\dfrac{1}{x-4} + \dfrac{1}{x-5} = \dfrac{1}{x-8} + \dfrac{1}{x-1}$

6) $\dfrac{x-3}{x-1} + \dfrac{x+3}{x+1} = \dfrac{x+6}{x+2} + \dfrac{x-6}{x-2}$

7) $\left(\frac{x+1}{x+2}\right)^2+\left(\frac{x-1}{x-2}\right)^2=2{,}5\cdot\frac{x^2-1}{x^2-4}$

8) $\frac{x^2+2x+2}{x+1}-\frac{x^2+4x+6}{x+2}=\frac{x^2+6x+12}{x+3}-\frac{x^2+8x+20}{x+4}$

9) $\frac{x^2+4}{x}+\frac{x}{x^2+3x+4}+\frac{11}{2}=0$ *Замена:* $a=x+\frac{4}{x}$

10) $\frac{1}{x-1}+\frac{2}{x-2}+\frac{3}{x-3}=\frac{6}{x+6}$

11) $(x+5)^4-13x^2(x+5)^2+36x^4=0$ *Замена:* $a=\left(\frac{x+5}{x}\right)^2$

12) $\frac{x^2-10x+15}{x^2-6x+15}=\frac{3x}{x^2-8x+15}$ *Замена:* $a=x+\frac{15}{x}-6$

13) $\frac{x^3+2x}{\left(x^2-x+2\right)^2}=\frac{3}{4}$ *Замена:* $a=x+\frac{2}{x}$

14) $\frac{x^3-x}{\left(x^2-2x-1\right)^2}=6$

15) $\frac{x^2-2x+2}{x-1}+\frac{x^2-8x+17}{x-4}=\frac{x^2-4x+5}{x-2}+\frac{x^2-6x+10}{x-3}$

ОТВЕТЫ

1) 0,5; 1

2) 1; 2

3) $8\frac{1}{4}$; 12

4) −3,5

5) 4,5

6) 0

7) $\frac{-3\pm\sqrt{17}}{2}$; $\frac{3\pm\sqrt{17}}{2}$

8) −2,5; 0

9) −4; −1

10) 1,2; 2,4 11) $-\frac{5}{3}$; $-\frac{5}{4}$; $\frac{5}{2}$; 5 12) $7 \pm \sqrt{34}$

13) 1; 2 14) $-\frac{1}{2}$; $-\frac{1}{3}$; 2; 3 15) 2,5

БЛОК 5. Решите уравнения, используя свойства корней квадратного уравнения

В

1) При каких значениях b сумма квадратов корней уравнения $x^2+bx+3=0$ равна 10?

2) В уравнении $x^2-3x+m=0$ найдите значение m, если корни x_1 и x_2 этого уравнения удовлетворяют соотношению $3x_1-2x_2=14$

3) Найдите k в уравнении $x^2+3x+k=0$, если его корни x_1 и x_2 удовлетворяют условию: $\frac{x_1}{x_2}=-\frac{2}{5}$.

4) При каком значении k уравнение $kx^2+12x-3=0$ будет иметь корень, равный $0,2$?

5) Найдите a, если сумма обратных к корням уравнения $x^2-(a+2)x+a+7=0$ чисел равна $\frac{7}{12}$.

6) При каком значении a сумма квадратов корней уравнения $x^2-(a-2)x-a-1=0$ принимает наименьшее значение?

7) В уравнении $x^2-8x+q=0$ найдите q, если сумма квадратов его корней равна 34.

8) При каких значениях параметра m один из корней уравнения $4x^2-(3+2m)x+2=0$ в восемь раз меньше другого?

9) Найдите сумму кубов корней уравнения $2x^2-5x+1=0$

10) При каком значении c один из корней уравнения $4x^2-20x+c=0$ на 2 меньше другого?

11) Разность корней квадратного уравнения $x^2-4x+q=0$ равна 20. Найдите q.

12) Решите уравнение $x^2+2cx=cx+2c^2$

13) Определите, при каком значении a уравнение $x^2+(2a-1)x+a^2=0$ имеет два равных корня.

14) Найдите значение m, при котором уравнение $x^2-2(m+6)x=(1-2m)(7-m)$ не имеет действительных корней.

15) Найдите значение параметра a, при котором уравнения $x^2+ax+8=0$ и $x^2+x+a=0$ имеют общий корень.

16) При каком значении k график функции $y=(2k-5)x^2-2(k-1)x+3$ касается оси абсцисс?

17) При каком значении m уравнение $my+1=m$ не имеет решений?

18) Найдите все значения a, при которых уравнение $a^2x^2-2x+1=0$ имеет один корень.

19) При каких значениях a уравнение $ax-a=x-1$ имеет бесконечно много решений?

20) При каких значениях n уравнение $nx+5=n-2x$ не имеет решений?

21) Найдите произведение всех значений m, при которых уравнение $x^2-9x+(m^2-4)(m^2-9)=0$ имеет один корень, равный 0.

22) При каких значениях m уравнение $m^2x-m=x+1$ имеет бесконечно много решений?

23) При каких значениях k уравнение $\frac{3x+1}{x+1}=k-2$ имеет отрицательный корень?

24) При каких значениях k уравнение $kx^2-(k-7)x+9=0$ имеет два равных отрицательных корня?

25) При каких значениях a уравнение $x+4=\frac{a}{x}$ имеет два различных действительных корня?

26) Найдите произведение всех значений параметра k, для каждого из которых уравнение $9x^2+kx=2x-k+6$ имеет равные корни.

27) При каких значениях a оба корня уравнения $x^2+3x+a+0,75=0$ отрицательные?

28) Найдите все значения параметра a, при каждом из которых уравнение $ax^2+13x+1=0$ имеет два различных решения.

29) При каких значениях параметра k уравнение $x^2-2x+k=0$ имеет два различных корня?

30) В уравнении $3x^2-5x+k=0$ найдите то значение k, при котором корни уравнения x_1 и x_2 удовлетворяют условию $6x_1+x_2=0$

31) Найдите $A=\frac{3x_1^2+5x_1\cdot x_2+3x_2^2}{4x_1\cdot x_2^2+4x_1^2\cdot x_2}$, в котором x_1 и x_2 - корни уравнения $3x^2+17x-14=0$

32) При каких целых значениях k корни квадратного уравнения $kx^2-(1-2k)x+k-2=0$ рациональные?

33) Определите значение параметра k в уравнении $x^2-(2k+1)x+k^2+2=0$, у которого один корень равен половине другого.

34) Найдите численное значение параметра k в уравнении $x^2+kx+k-1=0$, при котором сумма квадратов корней уравнения $x_1^2+x_2^2$ будет наименьшей.

ОТВЕТЫ

1) $b=\pm 4$

2) $m=-4$

3) $k=-10$

4) $k=15$

5) $a=5$

6) $a=1$

7) $q=15$

8) $-6;\ 3$

9) $\frac{95}{8}$

10) $c=21$

11) $q=-96$

12) $x_1=c;\ \ x_2=-2c$

13) $a=0,25$

14) таких значений нет

15) $a=-6$

16) $k=4$

17) $m=0$

18) $a=0;\ \pm 1$

19) $a=1$

20) $n=-2$

21) 36

22) $m=-1$

23) $k\in(-\infty;3)\cup(5;\infty)$

24) $k=1$

25) $a\in(-4;0)\cup(0;\infty)$

26) 220

27) $a\in\left(-\frac{3}{4};\frac{3}{2}\right]$

28) $(-\infty;0)\cup\left(0;\frac{169}{4}\right)$

29) $k\in(-\infty;1)$

30) $k=-2$

31) $A=\frac{909}{952}$

32) 2; 6; 12; …

33) $k=4$

34) $k=1$

§4. РЕШЕНИЕ СИСТЕМ АЛГЕБРАИЧЕСКИХ УРАВНЕНИЙ

<u>БЛОК 1</u>. Решите системы уравнений, используя метод подстановки:

А

1) $\begin{cases} x-y=6(x+y) \\ x^2-y^2=6 \end{cases}$

2) $\begin{cases} x^2+xy=2 \\ y-3x=7 \end{cases}$

3) $\begin{cases} x+y^2=2 \\ 2y^2+x^2=3 \end{cases}$

4) $\begin{cases} y^2+1-x=0 \\ y^2+y^3=xy \end{cases}$

5) $\begin{cases} (x+1)^2+(y-1)^2=1 \\ x+y=1 \end{cases}$

6) $\begin{cases} 3x+y=2(x-y) \\ (3x+y)^2+2(x-y)^2=96 \end{cases}$

7) $\begin{cases} x+2y=1 \\ x^2-3xy-2y^2=2 \end{cases}$

8) $\begin{cases} x^2+xy=\dfrac{3}{4} \\ \dfrac{x}{y}+1=\dfrac{3}{2} \end{cases}$

9) $\begin{cases} x^2-2xy=7 \\ x=3y-2 \end{cases}$

10) $\begin{cases} \dfrac{y-2}{x-1}=2 \\ y-2x=x^2-1 \end{cases}$

11) $\begin{cases} 2x-y=1 \\ 2x^2-y^2+x+y=-11 \end{cases}$

12) $\begin{cases} 2x^2-y^2=4 \\ x^2+3y^2-5x=6 \end{cases}$

В

13) $\begin{cases} \dfrac{1+x+x^2}{1+y+y^2}=3 \\ x+y=6 \end{cases}$

14) $\begin{cases} \dfrac{x^2+y+1}{y^2+x+1}=\dfrac{3}{2} \\ x-y=1 \end{cases}$

15) $\begin{cases} x+y=-8 \\ x^2+y^2+6x+2y=0 \end{cases}$

16) $\begin{cases} 2xy=-1 \\ x^2-y^2=\dfrac{3}{4} \end{cases}$

17) $\begin{cases} \dfrac{2}{x+y} - \dfrac{1}{x-3} = \dfrac{2}{3x-x^2} \\ 2x+y=3 \end{cases}$

18) $\begin{cases} \dfrac{1}{y^2+y} + \dfrac{2}{y+1} - \dfrac{1}{2-x} = 0 \\ x-y=3 \end{cases}$

19) $\begin{cases} \dfrac{x-y}{y-1} + \dfrac{x+5}{y+1} = \dfrac{4}{y^2-1} \\ x-2y=1 \end{cases}$

20) $\begin{cases} \dfrac{x-y-2}{x-3} = 0 \\ 2x^2+y^2-2xy=13 \end{cases}$

21) $\begin{cases} \dfrac{x+3y+1}{y} - \dfrac{y-x+3}{2(x-2)} = 2 \\ y-x=1 \end{cases}$

22) $\begin{cases} x^2-2y^2+x=-6 \\ x^2-3y^2=-11 \end{cases}$

ОТВЕТЫ:

1) $\left(\frac{7}{2};-\frac{5}{2}\right)$; $\left(-\frac{7}{2};\frac{5}{2}\right)$

2) $(-2;1)$; $\left(\frac{1}{4};\frac{31}{4}\right)$

3) $(1;-1)$; $(1;1)$

4) $(1;0)$; $(2;1)$

5) $(0;1)$, $(-1;2)$

6) $(-3;1)$; $(3;-1)$

7) $\left(\frac{5}{4};-\frac{1}{8}\right)$; $(-1;1)$

8) $\left(\frac{1}{2};1\right)$; $\left(-\frac{1}{2};-1\right)$

9) $\left(-3;-\frac{1}{3}\right)$; $(7;3)$

10) $(-1;-2)$

11) $(-1;-3)$; $\left(\frac{9}{2};8\right)$

12) $(2;2)$; $(2;-2)$

13) $(4;2)$; $(16;-10)$

14) $(2;1)$; $(3;2)$

15) $(-6;-2)$; $(-4;-4)$

16) $\left(1;-\frac{1}{2}\right)$; $\left(-1;\frac{1}{2}\right)$

17) $\left(\frac{2}{3};\frac{5}{3}\right)$

18) $\left(\frac{8}{3};-\frac{1}{3}\right)$

19) $(-5;-3)$ 20) $(-3;-5)$

21) $(3;4)$ 22) $(1;2)$; $(1;-2)$; $(-4;3)$; $(-4;-3)$

БЛОК 2. **Решите системы уравнений, используя метод алгебраических действий:**

А

1) $\begin{cases} 2xy-5y=5 \\ 3y^2-2xy=45 \end{cases}$

2) $\begin{cases} xy-2x+3y=6 \\ 2xy-3x+5y=11 \end{cases}$

3) $\begin{cases} xy+x=6 \\ xy^3+xy^2=24 \end{cases}$

4) $\begin{cases} x-y+xy=5 \\ x-y-xy=-7 \end{cases}$

5) $\begin{cases} x^2+y^2+x+y=2 \\ 2x^2-y^2+2x-y=4 \end{cases}$

6) $\begin{cases} xy+3x-4y=12 \\ xy+2x-2y=9 \end{cases}$

7) $\begin{cases} 2x-y-xy=14 \\ x+2y+xy=-7 \end{cases}$

8) $\begin{cases} x^3+xy^2=10 \\ y^3+x^2y=5 \end{cases}$

9) $\begin{cases} x^2+y^2=10 \\ x^4+x^2y^2=90 \end{cases}$

10) $\begin{cases} x^3-y^3=124 \\ x^2+xy+y^2=31 \end{cases}$

11) $\begin{cases} x^2y+xy^2=120 \\ x^2y-xy^2=30 \end{cases}$

12) $\begin{cases} x^2-xy=2 \\ y^2-xy=-1 \end{cases}$

13) $\begin{cases} x^2y^3=8 \\ x^3y^2=4 \end{cases}$

14) $\begin{cases} \dfrac{3}{4x+13}-\dfrac{1}{y}=0 \\ 7x+24y=65 \end{cases}$

В

15) $\begin{cases} 2x^2-xy-3y^2+x+y=6 \\ 2x^2-5xy+3y^2+x-y=2 \end{cases}$

16) $\begin{cases} x^2+3xy+x+3y=8 \\ 3y^2+xy-2x-6y=-4 \end{cases}$

17) $\begin{cases} x+xy+xy^2=6 \\ x^2+x^2y^2+x^2y^4=12 \end{cases}$

18) $\begin{cases} 7\left(\dfrac{1}{x}+\dfrac{1}{y}\right)=48 \\ 7\left(\dfrac{x}{y}-\dfrac{y}{x}\right)=48 \end{cases}$

19) $\begin{cases} 2x^2+xy-2x-y=5 \\ 2x^2-3xy-2x+3y=1 \end{cases}$

20) $\begin{cases} 3x+2y+\dfrac{x}{x+y}=5,5 \\ x+3y-\dfrac{2x}{x+y}=3 \end{cases}$

21) $\begin{cases} 2x^8=x^4y^4+1 \\ 3y^8=x^4y^4+2 \end{cases}$

22) $\begin{cases} 2x^4=3x^2y+20 \\ 3y^2=2x^2y-5 \end{cases}$

23) $\begin{cases} x^2+xy+x+y=-2 \\ y^2+xy+x+y=1 \end{cases}$

24) $\begin{cases} \dfrac{1}{x}-\dfrac{1}{y}=\dfrac{1}{6} \\ xy^2-x^2y=6 \end{cases}$

25) $\begin{cases} xy-\dfrac{x^3}{y}=-24 \\ xy-\dfrac{y^3}{x}=6 \end{cases}$

26) $\begin{cases} x+xy^3=9 \\ xy+xy^2=6 \end{cases}$

27) $\begin{cases} x^3-x^2y+xy^2-y^3=5 \\ x^3+x^2y+xy^2+y^3=15 \end{cases}$

ОТВЕТЫ:

1) $(3;5)$; $\left(\dfrac{7}{4};-\dfrac{10}{3}\right)$

2) $(-3;-2)$; $(1;2)$

3) $(2;2)$; $(-6;-2)$

4) $(2;3)$; $(-3;-2)$

5) $(-2;0)$; $(-2;-1)$; $(1;0)$; $(1;-1)$

6) $(-3;-3)$; $\left(4;\dfrac{1}{2}\right)$

7) $(3;-2)$; $\left(-\dfrac{7}{3};14\right)$

8) $(2;1)$

9) $(3;1)$; $(3;-1)$; $(-3;1)$; $(-3;-1)$

10) $(-1;-5)$; $(5;1)$

11) $(5;3)$

12) $(2;1)$; $(-2;-1)$

13) $(1;2)$

14) $(-1;3)$

15) $(-4;-2)$; $(2;1)$

16) $(1;1)$; $(7;-2)$

17) $(2;1)$

18) $\left(\frac{7}{6};\ \frac{1}{6}\right)$; $\left(\frac{1}{8};\ -\frac{7}{8}\right)$

19) $(2;1)$; $\left(-1;-\frac{1}{2}\right)$

20) $(1;1)$

21) $(1;1)$; $(-1;-1)$; $(-1;1)$; $(1;-1)$

22) $(2;1)$; $(-2;1)$

23) $(1;-2)$

24) $(2;3)$; $(-3;-2)$

25) $(4;2)$; $(-4;-2)$

26) $\left(8;\frac{1}{2}\right)$; $(1;2)$

27) $(2;1)$

БЛОК 3. Решите системы уравнений, используя метод разложения на множители:

А

1) $\begin{cases} x+y=7xy \\ x-y=3xy \end{cases}$

2) $\begin{cases} x^2-4y^2=0 \\ xy+x^2=6 \end{cases}$

3) $\begin{cases} 4x^2-3xy+8x-6y=0 \\ 3x-11y=-17 \end{cases}$

4) $\begin{cases} x^2=2x+3y \\ y^2=2y+3x \end{cases}$

5) $\begin{cases} x^2=4x+5y \\ y^2=4y+5x \end{cases}$

6) $\begin{cases} x+y=3xy \\ x-y=2xy \end{cases}$

7) $\begin{cases} x^2-4y^2=0 \\ x^2+xy-y^2=20 \end{cases}$

8) $\begin{cases} (x-y)(x+y-9)=0 \\ y^2=4x+13y \end{cases}$

9) $\begin{cases} y^2-4x^2=0 \\ y^2+xy-y=4 \end{cases}$

B

10) $\begin{cases} x-y=3 \\ x^4+3x^2y-4y^2=0 \end{cases}$

11) $\begin{cases} x^2y+9x-9xy=81 \\ \dfrac{2x+3y-15}{x-9}=1 \end{cases}$

12) $\begin{cases} xy^2-xy-3y+3=0 \\ \dfrac{x+4y-7}{y-1}=3 \end{cases}$

13) $\begin{cases} 3xy^2+15y+5xy=-25 \\ \dfrac{3x+12y+11}{3y+5}=1 \end{cases}$

14) $\begin{cases} x^2+y-20=0 \\ x+y^2-20=0 \end{cases}$

15) $\begin{cases} x^2-4y^2-4x+8y=0 \\ x^2+xy+30y=0 \end{cases}$

ОТВЕТЫ:

1) $(0;0)$; $\left(\frac{1}{2};\frac{1}{5}\right)$

2) $(2;1)$; $(-2;-1)$; $\left(-2\sqrt{3};\sqrt{3}\right)$; $\left(2\sqrt{3};-\sqrt{3}\right)$

3) $(-2;1)$; $\left(\frac{51}{35};\frac{68}{35}\right)$

4) $(0;0)$; $(5;5)$

5) $(0;0)$; $(9;9)$

6) $(0;0)$; $(2;0{,}4)$

7) $(-4;-2)$; $(4;2)$; $\left(-4\sqrt{5};2\sqrt{5}\right)$; $\left(4\sqrt{5};-2\sqrt{5}\right)$

8) $(0;0)$; $(17;17)$; $(-3;12)$; $(12;-3)$

9) $(1;2)$; $\left(-\frac{2}{3};-\frac{4}{3}\right)$; $(-2;4)$; $(1;-2)$

10) $(-6;-9)$; $(2;-1)$

11) $(-3;3)$

12) $(1;3)$

13) $(-5;1)$

14) $(-5;-5)$; $(4;4)$; $\left(\frac{1+\sqrt{77}}{2};\ \frac{1-\sqrt{77}}{2}\right)$; $\left(\frac{1-\sqrt{77}}{2};\ \frac{1+\sqrt{77}}{2}\right)$

15) $(0;0)$; $(-10;-5)$; $(20;-8)$; $(6;-1)$

БЛОК 4. Решите системы уравнений, используя метод введения новых переменных:

А

1) $\begin{cases} \dfrac{1}{2x-y}+y=-5 \\ \dfrac{y}{2x-y}=6 \end{cases}$

2) $\begin{cases} \dfrac{4}{x-y}+\dfrac{12}{x+y}=3 \\ \dfrac{8}{x-y}-\dfrac{18}{x+y}=-1 \end{cases}$

3) $\begin{cases} \dfrac{1}{x}+\dfrac{1}{y}=\dfrac{5}{6} \\ \dfrac{1}{x^2}-\dfrac{1}{y^2}=\dfrac{5}{36} \end{cases}$

4) $\begin{cases} x+y+\dfrac{x}{y}=9 \\ \dfrac{(x+y)x}{y}=20 \end{cases}$

5) $\begin{cases} (x+y)^2-2(x+y)=15 \\ xy=6 \end{cases}$

6) $\begin{cases} \dfrac{1}{x+y}+x=-1 \\ \dfrac{x}{x+y}=-2 \end{cases}$

7) $\begin{cases} \dfrac{1}{x-y}+x+1=0 \\ \dfrac{x}{x-y}+2=0 \end{cases}$

8) $\begin{cases} 3(x+5y)+5xy=-5 \\ 2(x+5y)+7xy=15 \end{cases}$

9) $\begin{cases} y=3-\dfrac{1}{2x-y} \\ \dfrac{y}{2x-y}+4=0 \end{cases}$

В

10) $\begin{cases} \dfrac{2x}{y}+\dfrac{y}{2x}=\dfrac{17}{4} \\ x^2+y^2=20 \end{cases}$

11) $\begin{cases} \dfrac{x+v}{x-y}+\dfrac{x-y}{x+y}=\dfrac{13}{6} \\ xy=5 \end{cases}$

12) $\begin{cases} \dfrac{1}{x+2y}+\dfrac{3}{2x-y}=-\dfrac{5}{8} \\ \dfrac{-2}{x+2y}+\dfrac{5}{2x-y}=\dfrac{21}{8} \end{cases}$

13) $\begin{cases} (x+y+1)^2+(x+v)^2=25 \\ x^2-y^2=3 \end{cases}$

14) $\begin{cases} \dfrac{x}{y}-\dfrac{y}{x}=\dfrac{5}{6} \\ x+v=5 \end{cases}$

15) $\begin{cases} xv-\dfrac{x}{y}=6 \\ xy-\dfrac{y}{x}=\dfrac{15}{2} \end{cases}$

16) $\begin{cases} x^2+v^2+2x^2y=2xy+9 \\ x+3=x^2y+y \end{cases}$ (Замена: $a=x-y;\quad b=x^2y$)

17) $\begin{cases} (x+2y)^2+(y-2x)^2=90 \\ (x+2y)+(y-2x)=12 \end{cases}$

18) $\begin{cases} \dfrac{1}{x+1}+\dfrac{1}{y}=\dfrac{1}{3} \\ \dfrac{1}{(x+1)^2}-\dfrac{1}{y^2}=\dfrac{1}{4} \end{cases}$

19) $\begin{cases} x+y+\dfrac{x^2}{y^2}=7 \\ \dfrac{(x+y)x^2}{y^2}=12 \end{cases}$

20) $\begin{cases} \dfrac{1}{3-x}+\dfrac{1}{y-2}=2 \\ \dfrac{2}{3-x}+\dfrac{5}{2-y}=-3 \end{cases}$

21) $\begin{cases} \dfrac{3x-2y}{2y+3x}=-\dfrac{1}{5} \\ \dfrac{1}{3x+2y}+3x-2y=-\dfrac{4}{5} \end{cases}$

22) $\begin{cases} \dfrac{x}{y}+\dfrac{y}{x}=\dfrac{13}{6} \\ x+y=5 \end{cases}$

23) $\begin{cases} \dfrac{x+1}{x}+\dfrac{y-1}{y}=-3 \\ \dfrac{xy+y-x-1}{xy}=2 \end{cases}$

24) $\begin{cases} \dfrac{x+2}{x}+\dfrac{y+1}{y}=-3 \\ \dfrac{xy+2y+x+2}{xy}=2 \end{cases}$

ОТВЕТЫ:

1) $\left(-\frac{7}{4};-3\right)$; $\left(-\frac{7}{6};-2\right)$

2) $(5;1)$

3) $(2;3)$

4) $(4;1)$; $\left(\frac{10}{3};\frac{2}{3}\right)$

5) $(3;2)$; $(2;3)$

6) $\left(1;-\frac{3}{2}\right)$; $(-2;3)$

7) $(-2;-3)$; $\left(1;\frac{3}{2}\right)$

8) $(-5;-1)$

9) $\left(-\frac{3}{8};-1\right)$; $\left(\frac{3}{2};4\right)$

10) $(4;2)$; $(-4;-2)$; $\left(\frac{2}{\sqrt{13}};\frac{16}{\sqrt{13}}\right)$; $\left(-\frac{2}{\sqrt{13}};-\frac{16}{\sqrt{13}}\right)$

11) $(5;1)$; $(-5;-1)$

12) $(3;-2)$

13) $(2;1)$; $\left(-\frac{19}{8};-\frac{13}{8}\right)$

14) $(3;2)$; $(-10;15)$

15) $(4;2)$; $(-4;-2)$

16) $(0;3)$; $(-3;0)$; $(2;1)$

17) $(-3;3)$; $(0{,}6;\ 4{,}2)$

18) $\left(\frac{11}{13};-\frac{24}{5}\right)$

19) $(2;1)$; $(6;-3)$; $\left(6-2\sqrt{3};\ 2\sqrt{3}-2\right)$; $\left(6+2\sqrt{3};\ -2-2\sqrt{3}\right)$

20) $(2;3)$

21) $\left(\frac{2}{3};\frac{3}{2}\right)$; $\left(-\frac{2}{15};-\frac{3}{10}\right)$

22) $(2;3)$; $(3;2)$

23) $\left(-\frac{1}{3};\frac{1}{2}\right)$; $\left(-\frac{1}{2};\frac{1}{3}\right)$

24) $\left(-1;-\frac{1}{3}\right)$; $\left(-\frac{2}{3};-\frac{1}{2}\right)$

<u>БЛОК 5</u>. Решите симметрические системы уравнений:

А

1) $\begin{cases} x+xy+y=5 \\ x^2+xy+y^2=7 \end{cases}$

2) $\begin{cases} x^2+y^2=25 \\ x+xy+y=19 \end{cases}$

3) $\begin{cases} x^2+3xy+y^2=61 \\ xy=12 \end{cases}$

4) $\begin{cases} x^2-xy+y^2=7 \\ x+y=5 \end{cases}$

5) $\begin{cases} x^2+y^2=2(xy+2) \\ x+y=6 \end{cases}$

6) $\begin{cases} x^2y+xy^2=12 \\ xy+x+y=7 \end{cases}$

В

7) $\begin{cases} x+y+29-xy=0 \\ x^2+y^2=x+y+72 \end{cases}$

8) $\begin{cases} x^2+xy+y^2=13 \\ x^2-xy+y^2=7 \end{cases}$

9) $\begin{cases} x^2y+xy^2=30 \\ \dfrac{1}{x}+\dfrac{1}{y}=\dfrac{5}{6} \end{cases}$

10) $\begin{cases} x+y+\sqrt{xy}=14 \\ x^2+y^2+xy=84 \end{cases}$

11) $\begin{cases} (x+1)(y+1)=10 \\ (x+y)(xy+1)=25 \end{cases}$

12) $\begin{cases} x-xy+y=1 \\ x^2+y^2+2x+2y=11 \end{cases}$

13) $\begin{cases} (x-2)(y-2)=4 \\ x^2+y^2+xy=3 \end{cases}$

14) $\begin{cases} xy(x^2+y^2)=10 \\ xy+x^2+y^2=7 \end{cases}$

15) $\begin{cases} x^2y+xy^2=240 \\ \dfrac{1}{x}+\dfrac{1}{y}=\dfrac{5}{12} \end{cases}$

ОТВЕТЫ:

1) $(1;2)$; $(2;1)$ 2) $(3;4)$; $(4;3)$

3) $(3;4)$; $(4;3)$; $(-3;-4)$; $(-4;-3)$

4) $(2;3)$; $(3;2)$ 5) $(4;2)$; $(2;4)$ 6) $(1;3)$; $(3;1)$

7) $(6;\ 7)$; $(7;\ 6)$; $\left(-5+\sqrt{6};-5-\sqrt{6}\right)$; $\left(-5-\sqrt{6};-5+\sqrt{6}\right)$

8) $(1;3)$; $(3;1)$; $(-1;-3)$; $(-3;-1)$

9) $(2;3)$; $(3;2)$; $(-6;1)$; $(1;-6)$

10) $(2;8)$; $(8;2)$ 11) $(4;1)$; $(1;4)$

12) $(1;2)$; $(2;1)$; $(1;-4)$; $(-4;1)$

13) $(1;-2)$; $(-2;1)$ 14) $(2;1)$; $(1;2)$; $(-1;-2)$; $(-2;-1)$

15) $(-12;2)$; $(2;-12)$; $(6;4)$; $(4;6)$

<u>БЛОК 6</u>. Решите системы однородных уравнений:

А

1) $\begin{cases}3x^2+xy-2y^2=0\\2x^2-3xy+y^2=-1\end{cases}$ 2) $\begin{cases}2x^2+3xy+3y^2=2\\3x^2-2xy-2y^2=3\end{cases}$

3) $\begin{cases}x^2+3xy-3y^2=1\\2x^2-xy+y^2=2\end{cases}$

В

4) $\begin{cases} 3x^2+2xy-2y^2=3 \\ 2x^2+3xy-y^2=4 \end{cases}$

5) $\begin{cases} 2x^2-3xv+y^2=3 \\ x^2+2xy-2y^2=6 \end{cases}$

6) $\begin{cases} x^2-xy+y^2=3 \\ 2x^2-xy-y^2=5 \end{cases}$

7) $\begin{cases} x^2+3xy=4 \\ 4y^2+xy=5 \end{cases}$

8) $\begin{cases} x^2-4xy+y^2=6 \\ y^2-3xy=4 \end{cases}$

9) $\begin{cases} 2xy-y^2=15 \\ x^2+xy=36 \end{cases}$

10) $\begin{cases} x^2-2xy-y^2=2 \\ xy+y^2=4 \end{cases}$

ОТВЕТЫ:

1) $(2;3)$; $(-2;-3)$

2) $(1;0)$; $(-1;0)$; $(-1;1)$; $(1;-1)$

3) $(1;0)$; $(-1;0)$; $(1;1)$; $(-1;-1)$

4) $(1;1)$; $(-1;-1)$

5) $(2;1)$; $(-2;-1)$

6) $(2;1)$; $(-2;-1)$: $\left(-\frac{4}{\sqrt{7}}:\frac{1}{\sqrt{7}}\right)$; $\left(\frac{4}{\sqrt{7}};-\frac{1}{\sqrt{7}}\right)$

7) $(1;1)$; $(-1;-1)$; $(8;-2{,}5)$; $(-8;2{,}5)$

8) $(1;-1)$; $(-1;1)$

9) $(4;5)$; $(-4;-5)$; $(3\sqrt{3};\sqrt{3})$; $(-3\sqrt{3};-\sqrt{3})$

10) $(3;1)$; $(-3;-1)$; $(-\sqrt{2};2\sqrt{2})$; $(\sqrt{2};-2\sqrt{2})$

<u>БЛОК 7</u>. Решите системы уравнений различными методами:

С

1) $\begin{cases} x^3+x^3y^3+y^3=17 \\ x+xy+y=5 \end{cases}$

2) $\begin{cases} x^2y+xy^2=30 \\ x^3+y^3=35 \end{cases}$

3) $\begin{cases} (x^3+1)(y^3+1)=18 \\ xy+x+y=5 \end{cases}$

4) $\begin{cases} x^4-y^4=15 \\ x^3y-xy^3=6 \end{cases}$

5) $\begin{cases} x^2-xy+y^2=7 \\ x^4+x^2y^2+y^4=21 \end{cases}$

6) $\begin{cases} x^2+y^2-3xy+4x+4y=-9 \\ xy-3x-3y=7 \end{cases}$

7) $\begin{cases} 3x^2y^2+x^2-3xy-7=0 \\ 10x^2y^2+3x^2-20xy-3=0 \end{cases}$

8) $\begin{cases} 2x-2y=3xy \\ 4x^2+4y^2=5x^2y^2 \end{cases}$

9) $\begin{cases} (x-y)(x^2-y^2)=16 \\ (x+y)(x^2+y^2)=40 \end{cases}$

10) $\begin{cases} 25x^2-4y^2=12 \\ \dfrac{3}{5x+2y}+\dfrac{4}{5x-2y}=2 \end{cases}$

В ответе укажите $x\cdot y$

11) $\begin{cases} x^2=13x+4y \\ y^2=4x+13y \end{cases}$

12) $\begin{cases} (x+y)^4+4(x+y)^2-117=0 \\ x-y=25 \end{cases}$

13) $\begin{cases} \dfrac{x^2}{y}+\dfrac{y^2}{x}=3 \\ x+y=2 \end{cases}$

14) $\begin{cases} x^2+2y^2=17 \\ 6x^2-xy-12y^2=0 \end{cases}$

15) $\begin{cases} (x+8)(y+20)=160 \\ (x+9)(y+10)=90 \end{cases}$

16) $\begin{cases} yx^3+2x^2y^2+xy^3=4 \\ x+y+x^2y+y^2x=4 \end{cases}$

17) Найдите длину диагонали прямоугольника, если координаты его вершин удовлетворяют системе уравнений: $\begin{cases} x^2-9y^2=0, \\ x^2+y^2=36. \end{cases}$

18) При каком наименьшем значении a система уравнений $\begin{cases}(x-1)^2+y^2=4\\ x=a\end{cases}$ имеет единственное решение?

19) Найдите коэффициенты a и c уравнения параболы $y=ax^2+5x+c$, проходящей через точки $M(1;10)$ и $N(-3;-18)$.

20) Найдите три числа a, b и c, если известно, что их сумма равна 1, а квадратное уравнение $ax^2+bx+c=0$ имеет единственное решение $x=-1$.

ОТВЕТЫ:

1) $(1;2)$; $(2;1)$

2) $(2;3)$; $(3;2)$

3) $(1;2)$; $(2;1)$

4) $(2;1)$; $(-2;-1)$

5) $(1;-2)$; $(-2;1)$; $(2;-1)$; $(-1;2)$

6) $(-1;-1)$

7) $(1;2)$; $(-1;-2)$

8) $(0;0)$; $(-1;2)$; $(-2;1)$

9) $(3;1)$; $(1;3)$

10) $-\dfrac{7}{40}$

11) $(0;0)$, $(12;-3)$; $(-3;12)$; $(17;17)$

12) $(14;-11)$; $(11;-14)$

13) $\left(\dfrac{4}{3};\dfrac{2}{3}\right)$; $\left(\dfrac{2}{3};\dfrac{4}{3}\right)$

14) $(3;2)$; $(-3;-2)$; $\left(-2\sqrt{2};\ \dfrac{3\sqrt{2}}{2}\right)$; $\left(2\sqrt{2};\ -\dfrac{3\sqrt{2}}{2}\right)$

15) $(0;0)$; $(-10;-100)$

16) $(1;1)$

17) 12

18) $a=-1$

19) $a=-1$, $c=6$

20) $a=\dfrac{1}{4}$, $b=\dfrac{1}{2}$; $c=\dfrac{1}{4}$

§ 5. РЕШЕНИЕ РАЦИОНАЛЬНЫХ НЕРАВЕНСТВ

БЛОК 1. Решите линейные неравенства и системы линейных неравенств:

А

Найдите наибольшее целое решение неравенства:

1) $3-2x<12-5x$

2) $x-8\ge 2\left(x+\frac{1}{2}\right)+7$

3) $x(x+3)>(x+1)(x+3)$

4) $\frac{9x+2}{10}-\frac{10x-2}{9}>2$

5) $\frac{3x-1}{5}-\frac{x+1}{2}<1-\frac{x}{7}$

Найдите наименьшее целое решение неравенства:

6) $3x+3<5(x+1)-2$

7) $\frac{3x+5}{4}-1\le\frac{x-2}{3}+x$

8) $2(x-3)-1>3(x-2)-4(x+1)$

9) $x^2+x<x(x+5)+5$

10) $\frac{x+4}{7}-\frac{x+7}{4}<-3$

11) $2<3x-5<4$

12) $-2\le 4-2x\le 2$

13) $x<3-x\le 11$

В

Решите системы неравенств и укажите наименьшее целое решение:

14) $\begin{cases}12x^2-(2x-3)(6x+1)>x\\(5x-1)(5x+1)-25x^2>x-6\end{cases}$

15) $\begin{cases}3x-4<8x+6\\2x-1>5x-4\\11x-9<15x+3\end{cases}$

16) $\begin{cases}\frac{7-x}{2}-3\le\frac{3+4x}{5}-4\\\frac{5}{3}x+5(4-x)>2(4-x)\end{cases}$

17) $\begin{cases}0,4x+\frac{7}{3}<\frac{2}{3}x-1,2\\5x+17>9x-63\end{cases}$

Найдите сумму всех целых решений системы:

18) $\begin{cases} 3x > 2 - \dfrac{2x-13}{11} \\ \dfrac{x}{6} + \dfrac{2}{3}(x-7) < \dfrac{3x-20}{9} \end{cases}$

19) $\begin{cases} \dfrac{x-1}{2} - \dfrac{x-2}{3} \geq \dfrac{x-3}{4} - x \\ 1 - 0,5x > x - 4 \end{cases}$

20) $\begin{cases} x - \dfrac{x-1}{2} - \dfrac{x+2}{3} \leq \dfrac{x-3}{4} \\ 1,5x - 5,05 < x \end{cases}$

21) $\begin{cases} \dfrac{3-2x}{15} \leq \dfrac{x-2}{3} + \dfrac{x}{5} \\ \dfrac{1-3x}{12} \geq \dfrac{5x-1}{3} - \dfrac{7x}{4} \end{cases}$

ОТВЕТЫ

1) 2	2) −16	3) −4	4) −8	5) 6	6) 1	7) 2
8) 0	9) −1	10) 18	11) ∅	12) 1	13) −8	14) 0
15) −1	16) 3	17) 14	18) 9	19) 5	20) 34	21) 2

<u>БЛОК 2</u>. Решите рациональные неравенства:

А

1) $11 - (x+1)^2 \geq x$

2) $(2x-8)^2 - 4x(2x-8) \geq 0$

3) $x(x+5) - 2 > 4x$

4) $\dfrac{1}{3}x^2 + 3x + 6 < 0$

5) $x > \dfrac{x^2}{2} - 4x + 5\dfrac{1}{2}$

6) $(2-x)x < 1$

7) $x^2 - \dfrac{2x-1}{3} \geq 2x + 4$

8) $\dfrac{x^2+10x}{10} - \dfrac{2x+5}{2} \leq 20$

9) $14x - x^2 \geq 49$

10) $x^2 - 5x + 16 > 0$

11) $6x^2 + 1 > 5x - \dfrac{x^2}{4}$

12) $x^2 + 4x + 4 \leq 0$

13) $(2-x)(x-3)(x-12) \geq 0$

14) $(x+14)(8-x)(5+x) \leq 0$

15) $x^3-25x\le 0$

16) $x\left(x^2-3x-4\right)>0$

17) $\left(x^2-9\right)\left(x^2-4\right)\le 0$

18) $x^4-5x^2+4<0$

19) $\frac{x^2}{10}+2>\frac{9x}{10}$

20) $(2-x)(3x+1)(2x-3)\le 0$

21) $x^3-3x^2-x+3>0$

22) $\left(x^2-5x+6\right)\left(x^2-1\right)\ge 0$

23) $\left(-7x^2-6x+1\right)(x-5)\ge 0$

24) $\left(x^2+x\right)\left(49-x^2\right)<0$

25) $x^3+6x^2-x-6<0$

26) $x^4-10x^2+9\le 0$

27) $x^2+1<3x-x^2+3$

28) $\left(x^2+5x+4\right)(3-x)<0$

29) $64x^3-x\ge 0$

30) $(10-x)\left(x^2+14x+33\right)\le 0$

B

31) $(x+3)^2(x-2)(x+5)^3<0$

32) $(8-x)(1+x)^2(10-x)^3\ge 0$

33) $(x-2)^2(x+1)(x-3)\le 0$

34) $\left(4x^2-4x+1\right)\left(x^2+6x+5\right)\le 0$

35) $x(x-1)^2\ge 0$

36) $-x^2-16+8x\ge 0$

37) $x^4+8x^3+12x^2\ge 0$

38) $(x-1)\left(x^2-1\right)\le 0$

39) $(x+3)^3(x-3)(x-4)(x-5)^2\le 0$

40) $\left(x^2-9\right)(x-4)^3(x+3)\le 0$

41) $(3-x)^5(x+1)^4(x-7)\ge 0$

42) $-9x^2+12x-4>0$

43) $\left(7-x^2\right)(x-1)^2\left(x^2-8x+16\right)\ge 0$

44) $(7-x)(2-x)^2(x+1)\ge 0$

45) $\left(x^2-3x+2\right)\left(x^3-3x^2\right)\left(4-x^2\right)\le 0$

46) $\left(x^2-6x+8\right)\left(x^2-4\right)\left(4+x^2-4x\right)\ge 0$

47) $(3+x)(x^2-x)^2(x-2)\ge 0$

48) $(x^2-9)^2(x+1)(x^2-2x-3)(x-1)\le 0$

49) $(x-1)(3-x)(2-x)^2\ge 0$

50) $(x^2+1)(x^2-4x-5)\ge 0$

51) $(x-5)(3x^2-x+2)(x^2-25)\le 0$

52) $x^4-2x^2-63\le 0$

53) $x^8-6x^7+9x^6-x^2+6x-9<0$

54) $(3x^2-5x+8)(x+4)<0$

55) $x^5+x^3<x^2+1$

56) $(x^4-1)(x^2+11)\ge 0$

57) $(x^3-3x^2)(x^2+7)\le 0$

58) $(x-1)(x^2-1)(x^3-1)(x^4-1)\le 0$

59) $(x-1)^5(x+2)(2x-10-x^2)<0$

60) $(x-3)(3x^2-x+2)(x^2-9)\ge 0$

61) $(x^3-4x)(x^2+2x-8)(x^2+7x+10)(x^2+1)\le 0$

62) $(x-3)(x^2+3)(x^2-6x+9)\le 0$

63) $(27-x^3)(x^2-9)\le 0$

64) $(x^2-1)^3(3x^2+1)\le(x^2-1)^3(-6-3x-5x^2)$

ОТВЕТЫ

1) $[-5; 2]$

2) $[-4; 4]$

3) $(-\infty; -2)\cup(1; \infty)$

4) $(-6; -3)$

5) $\left(5-\sqrt{14}; 5+\sqrt{14}\right)$

6) $x \neq 1$

7) $(-\infty; -1]\cup\left[\frac{11}{3}; \infty\right)$

8) $[-15; 15]$

9) $x = 7$

10) $x \in \mathbb{R}$

11) $\left(-\infty; \frac{2}{5}\right)\cup\left(\frac{2}{5}; \infty\right)$

12) $x = -2$

13) $(-\infty; 2]\cup[3; 12]$

14) $[-14; -5]\cup[8; \infty)$

15) $(-\infty; -5]\cup[0; 5]$

16) $(-1; 0)\cup(4; \infty)$

17) $[-3; -2]\cup[2; 3]$

18) $(-2; -1)\cup(1; 2)$

19) $(-\infty; 4)\cup(5; \infty)$

20) $\left[-\frac{1}{3}; \frac{3}{2}\right]\cup[2; \infty)$

21) $(-1; 1)\cup(3; \infty)$

22) $(-\infty; -1]\cup[1; 2]\cup[3; \infty)$

23) $(-\infty; -1]\cup\left[\frac{1}{7}; 5\right]$

24) $(-\infty; -7)\cup(-1; 0)\cup(7; \infty)$

25) $(-\infty; -6)\cup(-1; 1)$

26) $[-3; -1]\cup[1; 3]$

27) $\left(-\frac{1}{2}; 2\right)$

28) $(-4; -1)\cup(3; \infty)$

29) $\left[-\frac{1}{8}; 0\right]\cup\left[\frac{1}{8}; \infty\right)$

30) $[-11; -3]\cup[10; \infty)$

31) $(-5; -3)\cup(-3; 2)$

32) $(-\infty; 8]\cup[10; \infty)$

33) $[-1;3]$

34) $[-5;-1]\cup\left\{\frac{1}{2}\right\}$

35) $[0;\infty)$

36) $x=4$

37) $(-\infty;-6]\cup[-2;\infty)$

38) $(-\infty;-1]\cup\{1\}$

39) $(-\infty;-3]\cup[3;4]\cup\{5\}$

40) $\{-3\}\cup[3;4]$

41) $\{-1\}\cup[3;7]$

42) $x\in\varnothing$

43) $\left[-\sqrt{7};\ \sqrt{7}\right]\cup\{4\}$

44) $[-1;7]$

45) $[-2;1]\cup\{2\}\cup[3;\infty)$

46) $(-\infty;-2]\cup\{2\}\cup[4;\infty)$

47) $(-\infty;-3]\cup\{0;1\}\cup[2;\infty)$

48) $\{-3;-1\}\cup[1;3]$

49) $[1;3]$

50) $(-\infty;-1]\cup[5;\infty)$

51) $(-\infty;-5]\cup\{5\}$

52) $[-3;3]$

53) $(-1;1)$

54) $(-\infty;-4)$

55) $(-\infty;1)$

56) $(-\infty;-1]\cup[1;\infty)$

57) $(-\infty;3]$

58) $\{-1;1\}$

59) $(-\infty;-2)\cup(1;\infty)$

60) $[-3;\infty)$

61) $(-\infty;-5]\cup[-4;0]\cup\{2\}$

62) $(-\infty;3]$

63) $[-3;\infty)$

64) $[-1;1]$

БЛОК 3. Решите дробно-рациональные неравенства:

А

1) $\frac{x-2}{(x+2)(x-5)} \geq 0$

2) $\frac{(x-5)(x+2)^2}{x-1} \leq 0$

3) $\frac{x^2+7x+10}{(x+3)^2} \leq 0$

4) $\frac{(x^2+2x-3)(x^2-16)}{(x^2-1)(x^2-9)} \geq 0$

5) $\frac{4-x^2}{(x+7)x} \leq 0$

6) $\frac{12+x-x^2}{x} \geq 0$

7) $\frac{(4-7x)(x^2+2)}{(x-3)(x-2)} > 0$

8) $\frac{2+3x-2x^2}{(x^4-16)x} \geq 0$

9) $\frac{x^6-1}{x^6+1} \geq 0$

10) $\frac{(x-1)(x^2+4x+3)}{x^2+2} \geq 0$

11) $\frac{(2x+3)(x^2-x+1)}{x^2+1} < 0$

12) $\frac{x^2-x+1}{x^2} > 0$

13) $\frac{(x-3)^2(x-2)x}{(x+1)^4(x+5)} > 0$

14) $\frac{7x-12-x^2}{2x^2-x-3} < 0$

15) $\frac{(2x-3)(4-x)^3x^2}{(x-6)(x^2+4x+6)} \leq 0$

16) $\frac{x^2-7x+12}{2x^2+4x+5} > 0$

17) $\frac{x^4+x^2+1}{x^2-4x-5} < 0$

18) $\frac{1+3x^2}{2x^2-21x+40} < 0$

19) $\frac{x^2-36}{x^2-9x+18} < 0$

20) $\frac{x^2-6x+9}{5-4x-x^2} \geq 0$

21) $\frac{25-16x^2}{x^2+4x+4} > 0$

22) $\frac{x^4-2x^2-8}{x^2+2x+1} < 0$

В

23) $\frac{x+4}{x-2} \le \frac{2}{x+1}$

24) $\frac{4}{3-x} \le 1+x$

25) $\frac{x-2}{x+2} > \frac{2x-3}{4x-1}$

26) $\frac{2x^2-4x-6}{4x-11} \ge 2$

27) $\frac{x^2-3x+2}{x^2+3x+2} \ge 1$

28) $\frac{x^2-3x+24}{x^2-3x+3} < 4$

29) $\frac{x^2-5x+12}{x^2-4x+5} > 3$

30) $\frac{2}{x^2-3x-4} \ge \frac{3}{x^2+x-6}$

31) $\frac{2}{x^3} - \frac{3}{x^2} > \frac{5}{x}$

32) $\left(\frac{3-x}{2+x}\right)^2 > 1$

33) $\frac{1}{2-x} + \frac{5}{2+x} < 1$

34) $\left(\frac{4x-22}{x-5}\right)^2 \le 9$

35) $\frac{6}{2-4x} - \frac{5x}{1-2x} \le 0$

36) $\frac{1}{x+1} - \frac{2}{x^2-x+1} \le \frac{1-2x}{1+x^3}$

37) $\left(\frac{x+1}{4-x}\right)^2 \le \frac{1}{4}$

38) $\frac{2}{x^3} - \frac{3}{x^2} < \frac{5}{x}$

39) $\frac{35x}{4+10x-6x^2} \ge \frac{x+2}{3x+1} - \frac{3x-1}{x-2}$

40) $\frac{6x^2-x-18}{3x^2-12} + \frac{5-2x}{2-x} \le 5 + \frac{1}{x-2}$

ОТВЕТЫ

1) $(-2; 2] \cup (5; \infty)$

2) $\{-2\} \cup (1; 5]$

3) $[-5; -3) \cup (-3; -2]$

4) $(-\infty; -4] \cup (-1; 1) \cup (1; 3) \cup [4; \infty)$

5) $(-\infty; -7) \cup [-2; 0) \cup [2; \infty)$

6) $(-\infty; -3] \cup (0; 4]$

7) $\left(-\infty; \frac{4}{7}\right) \cup (2; 3)$

8) $(-\infty; -2) \cup \left[-\frac{1}{2}; 0\right)$

9) $(-\infty;-1]\cup[1;\infty)$

10) $[-3;-1]\cup[1;\infty)$

11) $\left(-\infty;-\frac{3}{2}\right)$

12) $(-\infty;0)\cup(0;\infty)$

13) $(-5;-1)\cup(-1;0)\cup(2;3)\cup(3;\infty)$

14) $(-\infty;-1)\cup\left(\frac{3}{2};3\right)\cup(4;\infty)$

15) $\{0\}\cup\left[\frac{3}{2};4\right]\cup(6;\infty)$

16) $(-\infty;3)\cup(4;\infty)$

17) $(-1;5)$

18) $\left(\frac{5}{2};8\right)$

19) $(-6;3)$

20) $(-5;1)\cup\{3\}$

21) $\left(-\frac{5}{4};\frac{5}{4}\right)$

22) $(-2;-1)\cup(-1;2)$

23) $(-1;2)$

24) $\{1\}\cup(3;\infty)$

25) $(-\infty;-2)\cup\left(\frac{1}{4};1\right)\cup(4;\infty)$

26) $\left[2;\frac{11}{4}\right)\cup[4;\infty)$

27) $(-\infty;-2)\cup(-1;0]$

28) $(-\infty;-1)\cup(4;\infty)$

29) $\left(\frac{1}{2};3\right)$

30) $(-3;-1)\cup[0;2)\cup(4;11]$

31) $(-\infty;-1)\cup\left(0;\frac{2}{5}\right)$

32) $(-\infty;-2)\cup\left(-2;\frac{1}{2}\right)$

33) $(-\infty;-2)\cup(2;\infty)$

34) $\left[\frac{37}{7};7\right]$

35) $\left(\frac{1}{2};\frac{3}{5}\right]$

36) $(-\infty;-1)\cup(-1;2]$

37) $\left[-6;\frac{2}{3}\right]$

38) $(-1;0)\cup\left(\frac{2}{5};\infty\right)$

39) $\left(-\infty;-\frac{1}{3}\right)\cup\left[\frac{3}{16};2\right)\cup(2;\infty)$

40) $(-\infty;-3]\cup\left(-2;\frac{2}{3}\right]\cup(2;\infty)$

БЛОК 4. **Решите системы неравенств:**

А

1) $\begin{cases} x^2 > 16 \\ x^2 - 16x \le 0 \end{cases}$

2) $\begin{cases} 6x - x^2 - 5 \le 0 \\ x^2 - 25 \le 0 \end{cases}$

3) $\begin{cases} x(x+5) < 2(x^2+2) \\ x^2 + x + 8 > 0 \end{cases}$

4) $\begin{cases} \dfrac{2x-3}{3x+5} > 0 \\ \dfrac{-2}{3x+5} > 0 \end{cases}$

5) $\begin{cases} x(x-1) \le 0 \\ x^2 - 3x + 2 \le 0 \end{cases}$

6) $\begin{cases} x^2 - 14x + 45 < 0 \\ x^2 - 11x + 30 > 0 \end{cases}$

7) $\begin{cases} x^2 - x - 6 \ge 0 \\ x^2 - 4x < 0 \end{cases}$

8) $\begin{cases} x^2 - 4 < 0 \\ x + 1 > 0 \\ \dfrac{1}{2} - x > 0 \end{cases}$

9) $\begin{cases} x < 0 \\ 21x^2 + 39x - 6 < 0 \end{cases}$

10) $\begin{cases} x^2 + x - 6 < 0 \\ -x^2 + 2x + 3 \le 0 \end{cases}$

11) $\begin{cases} x^2 - 144 > 0 \\ x - 3 < 0 \end{cases}$

12) $\begin{cases} x^2 + 4x - 5 > 0 \\ x^2 - 2x - 8 < 0 \end{cases}$

13) $\begin{cases} x + 7 > 0 \\ x^2 + 5x < 0 \end{cases}$

14) $\begin{cases} x^2 - 3x - 4 \le 0 \\ 3x - 12 \ge 0 \end{cases}$

15) $\begin{cases} 8x - 2 < x - 1 \\ 2x^2 - x - 1 \le 0 \end{cases}$

16) $\begin{cases} x^2 + 3x + 2 > 0 \\ \dfrac{x}{x+1} \le 0 \end{cases}$

17) $\begin{cases} \dfrac{x^2 - 7x + 10}{x^2 + 3x + 10} \ge 0 \\ x^2 - x - 6 \ge 0 \end{cases}$

18) $\begin{cases} \dfrac{(x+1)(x-2)}{x-6} \ge 0 \\ \dfrac{x+5}{(4-x)(x-3)} \ge 0 \end{cases}$

19) $\begin{cases} \dfrac{6x-1}{x+4} \le 2 \\ 5(x-8) > 6x \end{cases}$

20) $-1 < 3 + 2x \le 4$

21) $1 \le -2x - 3 < 4$

22) $-1 < 5x + 4 < 19$

23) $-2 < \dfrac{4x-1}{3} \le 0$

B

24) $\begin{cases} 6x^2 - 29x + 30 \le 0 \\ 5x + 2 > 3x^2 \end{cases}$

25) $\begin{cases} x^2 + 6x + 9 \le 0 \\ x^2 + 6x + 8 \le 0 \end{cases}$

26) $\begin{cases} (x+4)(x+5) - x \le 5 \\ -12x - 18 < 2x^2 \end{cases}$

27) $\begin{cases} 2 - \dfrac{5+x}{7} < 1 - \dfrac{9-x}{14} \\ 12 - \dfrac{1}{3}\left(47 - \dfrac{60}{x}\right) < 3 \end{cases}$

28) $\begin{cases} 3x - 2 \le 5x - 8 \\ \dfrac{2x-1}{2-x} < 4 \end{cases}$

29) $\begin{cases} 3x^2 - 4x + 1 > 0 \\ 3x^2 - 5x + 2 \le 0 \end{cases}$

30) $\begin{cases} \dfrac{2-x}{x+1} - 1 \ge 0 \\ \dfrac{2-x}{x+1} - 2 \le 0 \end{cases}$

31) $\begin{cases} 2(x-1) - 3(x-4) > x + 5 \\ \dfrac{3x-4}{x^2 + 4x + 4} \ge 0 \end{cases}$

32) $\begin{cases} (x^2+1)(x^2+3)(x^2-2) \ge 0 \\ x < 3 \end{cases}$

33) $\begin{cases} 4x^2 - 4x - 3 \le 0 \\ \dfrac{1}{x^2} \ge 1 \end{cases}$

34) $\begin{cases} (x^2 - 4x)(x-1) \le 0 \\ (x^2 - 1)(3 - x) \ge 0 \end{cases}$

35) $\begin{cases} (x^2 - 4)(x^2 - 2x + 1) \ge 0 \\ (x - 14)(7 - x^2) \le 0 \end{cases}$

36) $\begin{cases} \dfrac{x^2+10x+25}{4x-5} \ge 0 \\ (x-2)(x^2-6x+9) \le 0 \end{cases}$

37) $0 < \dfrac{3x-1}{2x+5} < 1$

38) $2 \le x^2 + x < 6$

39) $1 < \dfrac{3x-1}{2x+1} < 2$

40) $1 < \dfrac{3x^2-7x+8}{x^2+1} \le 2$

41) $3 \le \dfrac{5x-1}{2x-3} \le 5$

42) $5x-20 \le x^2 \le 8x$

43) $\dfrac{1}{4} < \dfrac{1}{x} < \dfrac{1}{3}$

ОТВЕТЫ

1) $(4;16]$

2) $[-5;1]\cup\{5\}$

3) $(-\infty;1)\cup(4;\infty)$

4) $\left(-\infty;-\dfrac{5}{3}\right)$

5) $x=1$

6) $(6;9)$

7) $[3;4)$

8) $\left(-1;\dfrac{1}{2}\right)$

9) $(-2;0)$

10) $(-3;-1]$

11) $(-\infty;-12)$

12) $(1;4)$

13) $(-5;0)$

14) $x\in\{4\}$

15) $\left[-\dfrac{1}{2};\dfrac{1}{7}\right)$

16) $(-1;0]$

17) $(-\infty;-2]\cup[5;\infty)$

18) $x\in\varnothing$

19) $x\in\varnothing$

20) $\left(-2;\dfrac{1}{2}\right]$

21) $(-3{,}5;-2]$

22) $(-1;3)$

23) $\left(-\dfrac{5}{4};\dfrac{1}{4}\right]$

24) $\left[\dfrac{3}{2};2\right)$

25) $x=-3$

26) $[-5;-3)$

27) $\left(\dfrac{13}{3};\infty\right)$

28) $[3;\infty)$

29) $x\in\varnothing$

30) $\left[0;\dfrac{1}{2}\right]$

31) $\left[\frac{4}{3}; 2,5\right)$

32) $\left(-\infty; -\sqrt{2}\right] \cup \left[\sqrt{2}; 3\right)$

33) $\left[-\frac{1}{2}; 0\right) \cup (0; 1]$

34) $(-\infty; -1] \cup [1; 3]$

35) $\left[-\sqrt{7}; -2\right] \cup \{1\} \cup \left[2; \sqrt{7}\right] \cup [14; \infty)$

36) $\{-5\} \cup \left(\frac{5}{4}; 2\right] \cup \{3\}$

37) $\left(\frac{1}{3}; 6\right)$

38) $(-3; -2] \cup [1; 2)$

39) $(-\infty; -3) \cup (2; \infty)$

40) $[1; 6]$

41) $[2,8; 8]$

42) $[0; 8]$

43) $(3; 4)$

<u>БЛОК 5</u>. Решите совокупности неравенств:

А

1) $\left[\begin{array}{l} x > 3 \\ 5 - 2x < 2(1 - x) \end{array}\right.$

2) $\left[\begin{array}{l} 3 < x < 5 \\ x \geq 5 \end{array}\right.$

3) $\left[\begin{array}{l} -1 \leq x < 0 \\ 0 \leq x < 2 \\ 2 \leq x < 5 \end{array}\right.$

4) $\left[\begin{array}{l} -1 < x < 2 \\ 2 \leq x < 5 \\ x \geq 5 \end{array}\right.$

5) $\left[\begin{array}{l} \frac{2x+1}{2} - \frac{2-x}{7} > 1 \\ -4x - 1 < 0 \end{array}\right.$

6) $\left[\begin{array}{l} \frac{3-2x}{5} < \frac{1-x}{2} \\ 2 - 3x > x \end{array}\right.$

В

7) $\left[\begin{array}{l} 2 < 2x < 4 \\ (x-1)(x-2) \geq 0 \end{array}\right.$

8) $\left[\begin{array}{l} (x-1)(x-2) \geq 0 \\ -1 < 2x - 3 < 1 \end{array}\right.$

9) $\left[\begin{array}{l} x(x-10) \geq 0 \\ -x^2 + 4x - 4 \geq 0 \end{array}\right.$

10) $\left[\begin{array}{l} 2x^2-7x+5\le 0 \\ 2x^2-5x+3\ge 0 \end{array}\right.$ 11) $\left[\begin{array}{l} x<1 \\ x^2-3x+2<0 \end{array}\right.$ 12) $\left[\begin{array}{l} x^2-8x+16<0 \\ x^2-6x+8<0 \end{array}\right.$

13) $\left[\begin{array}{l} \dfrac{x-6}{x-4}<0 \\ \dfrac{x-2}{x-4}<0 \end{array}\right.$ 14) $\left[\begin{array}{l} x^2+2x-3\ge 0 \\ x^2+2x+3\le 0 \end{array}\right.$ 15) $\left[\begin{array}{l} x^2-5x-6\ge 0 \\ x^2-5x+6>0 \end{array}\right.$

16) $\left[\begin{array}{l} 2x-3\le 1 \\ x^2-4x+3\ge 0 \end{array}\right.$

ОТВЕТЫ

1) $(3;\infty)$ 2) $(3\ \infty)$ 3) $[-1;5)$

4) $(-1;\infty)$ 5) $\left(-\dfrac{1}{4};\infty\right)$ 6) $\left(-\infty;\dfrac{1}{2}\right)$

7) $x\in\mathbb{R}$ 8) $(-\infty;\infty)$ 9) $(-\infty;0]\cup\{2\}\cup[10;\infty)$

10) $x\in\mathbb{R}$ 11) $(-\infty;1)\cup(1;2)$ 12) $(2;4)$

13) $(2;4)\cup(4;6)$ 14) $(-\infty;-3]\cup[1;\infty)$ 15) $(-\infty;2)\cup(3;\infty)$

16) $(-\infty;2]\cup[3;\infty)$

БЛОК 6. Решите неравенства:

С

1) $\dfrac{x^4-2x^2-8}{x^2+2x+1}<0$

2) $(x+6)^2(x^2+x-1)<(x^2+3x)(x+6)^2$

3) $\dfrac{x^2-x+6}{x^2-3x+2}\ge\dfrac{2x}{x-2}$

4) $\begin{cases} \dfrac{1}{1-x}+2<0 \\ \dfrac{3}{5+2x}-4<0 \end{cases}$

5) $\dfrac{\left(x^2-4x-5\right)\left(9x^2-6x+1\right)}{\left(x^2-2x-15\right)\left(5x^2-x+4\right)}\le 0$

6) $\dfrac{\left(x^2-5x-6\right)\left(3x^2+2x+1\right)}{\left(3x^2-12x+12\right)\left(x^2+x+8\right)}<0$

7) $\dfrac{x^4-4x^3+4x^2}{(x+4)^5(5-x)^3}\le 0$

8) $\begin{cases} 1+\dfrac{2}{x-2}>\dfrac{6}{x-1} \\ \dfrac{1}{x-1}\ge 0 \end{cases}$

9) $\dfrac{6}{-4x-x^2}-\dfrac{2}{x^2-4x}+\dfrac{x}{x^2-16}\ge 0$

10) $\begin{cases} \dfrac{x}{3}-\dfrac{4}{3}\le\dfrac{4}{x} \\ \dfrac{1}{x}>-1 \\ x^2+3x+1>0 \end{cases}$

11) $2(x+2)^2-3(x+2)+1\le 0$

12) $\left(x^2-3x\right)^2-2\left(x^2-3x\right)-8>0$

13) $\left(x^2+3x+1\right)\left(x^2+3x-3\right)\ge 5$

14) $\left(x^2-x-1\right)\left(x^2-x-7\right)<-5$

15) $\dfrac{1}{x^2+x}\le\dfrac{1}{2x^2+2x+3}$

16) $\frac{1}{x^2-3x+2} \ge \frac{1}{x^2-7x+12}$

17) $\left(x+\frac{6}{x}\right)^2+2\left(x+\frac{6}{x}\right)-35 \le 0$

18) $\frac{x^2-x}{x^2-x+1} > \frac{x^2-x+2}{x^2-x-2}+1$

19) $\left(x^2+3x\right)(2x+3)-16\,\frac{2x+3}{x^2+3x} \ge 0$

20) $\frac{2x^2-3x-1}{x^2+x-1} \ge x+1$

ОТВЕТЫ

1) $(-2;-1)\cup(-1;2)$

2) $\left(-\frac{1}{2};\infty\right)$

3) $[-2;1)\cup(2;3]$

4) $\left(1;\frac{3}{2}\right)$

5) $(-3;-1]\cup\left\{\frac{1}{3}\right\}$

6) $(-1;2)\cup(2;6)$

7) $(-\infty;-4)\cup\{0;2\}\cup(5;\infty)$

8) $(2;3)\cup(4;\infty)$

9) $(-4;0)\cup(4;\infty)$

10) $\left(-\infty;\frac{-3-\sqrt{5}}{2}\right)\cup(0;6]$

11) $\left[-\frac{3}{2};-1\right]$

12) $(-\infty;-1)\cup(1;2)\cup(4;\infty)$

13) $(-\infty;-4]\cup[-2;-1]\cup[1;\infty)$

14) $(-2;-1)\cup(2;3)$

15) $(-1;0)$

16) $(-\infty;1)\cup(2;2{,}5]\cup(3;4)$

17) $[-6;-1]\cup[2;3]$

18) $(-1;0)\cup(1;2)$

19) $[-4;-3)\cup\left[-\frac{3}{2};0\right)\cup[1;\infty)$

20) $\left(-\infty;\frac{-1-\sqrt{5}}{2}\right)\cup\left[0;\frac{-1+\sqrt{5}}{2}\right)$

§6. РЕШЕНИЕ УРАВНЕНИЙ С ПЕРЕМЕННОЙ ПОД ЗНАКОМ МОДУЛЯ

БЛОК 1. **Решите методом сведения исходного уравнения к равносильному уравнению, системе или совокупности уравнений:**

А

1) $|2x-3|=11$

2) $|x^2-x|=6$

3) $|5x^2-3|=2$

4) $|x^2-5x+4|=4$

5) $|2x^2+x-4|=|x^2+2x-2|$

6) $|3x^2-3x+5|=|2x^2+6x-3|$

7) $|3x^2+5x-9|=|6x+15|$

8) $|x-6|=|x^2-5x+9|$

В

9) $|x^2-4x-4|+4=2x$

10) $|x^2-2x-1|=1-x$

11) $|-x^2-16|=8x$

12) $|x^2-x-3|=-x-1$

13) $3|x^2-6x+7|=5x-9$

14) $2|x^2+2x-5|=x-1$

15) $|x^2+x-1|=2x-1$

16) $|x^2+3x-4|=3x$

17) $|x^2-4x+4|=x$

18) $|x^2-x+3|=x+2$

19) $|6x^2+2x-2|=x-1$

20) $|2x^2+5x-10|=5-2x$

ОТВЕТЫ

1) $-4;\ 7$

2) $-2;\ 3$

3) $\pm 1;\ \pm\frac{\sqrt{5}}{5}$

4) $0;\ 5$

5) $\pm 1;\ \pm 2$

6) $1;\ 8$

7) $\pm 3;\ -\frac{8}{3};\ -\frac{2}{3}$

8) $1;\ 3$

9) $4;\ 6$

10) $-1;\ 0$

11) 4

12) $-\sqrt{2};\ 1-\sqrt{5}$

13) $3;\ 6$

14) $\frac{-5+\sqrt{113}}{4};\ \frac{3}{2}$

15) $\frac{-3+\sqrt{17}}{2};\ 1$

16) $-3+\sqrt{13};\ 2$

17) $1;\ 4$

18) 1

19) $\varnothing$

20) $-5;\ -\frac{5}{2};\ 1;\ \frac{3}{2}$

БЛОК 2. **Решите уравнения методом, основанным на раскрытии модуля по определению:**

А

1) $\left|\left|x-2\right|+3\right|=3$

2) $\left|\left|2x+5\right|-x\right|=7$

3) $\left|2-x\right|=5-4x$

4) $\dfrac{\left|x+2\right|}{3}=\dfrac{x+2}{5}+x$

5) $\left|x+2\right|=2(3-x)$

6) $\left|3x-2\right|+x=11$

7) $\left|x\right|=-3x-5$

8) $x+\left|x\right|=0$

В

9) $x^2+\left|x-1\right|=3$

10) $-\dfrac{\left|x\right|}{x}-x=\dfrac{x^2}{2}+1$

11) $\dfrac{1-2x}{3-\left|x-1\right|}=1$

12) $\left|x+1\right|=-x^2-2x+5$

13) $\left|x\right|=x^2+x-2$

14) $x^2-4\left|x+1\right|+5x+3=0$

15) $\left|x-3\right|=x^2-2x-7$

16) $x^2-4\left|x+1\right|-41=0$

17) $3x^2-5\left|x-2\right|-12=0$

18) $x^2-18\left|x-2\right|-4=0$

19) $x^2-4\left|x-3\right|-2x-7=0$

20) $x^2+4x+\left|x+3\right|+3=0$

ОТВЕТЫ

1) 2

2) -4; 2

3) 1

4) $\dfrac{4}{13}$

5) $\dfrac{4}{3}$

6) $-\dfrac{9}{2}$; $\dfrac{13}{4}$

7) $-2{,}5$

8) $(-\infty;0]$

9) -1; $\dfrac{-1+\sqrt{17}}{2}$

10) -2

11) $-\dfrac{1}{3}$

12) -3; 1

13) $-1-\sqrt{3}$; $\sqrt{2}$

14) $\dfrac{-9-\sqrt{53}}{2}$; $\dfrac{-1+\sqrt{5}}{2}$

15) $\dfrac{1-\sqrt{41}}{2}$; 4

16) $-2-\sqrt{41}$; 9

17) $-\dfrac{11}{3}$; 2

18) -20; 2; 16

19) $-1-\sqrt{20}$; 5

20) -3; -2

БЛОК 3. **Решите уравнения методом введения новой переменной:**

А

1) $(x+1)^2+|x+1|-2=0$

2) $(x+1)^2-2|x+1|+1=0$

3) $x^2-4|x|+3=0$

4) $(x-1)^2+|x-1|-2=0$

5) $(x+2)^2=2|x+2|+3$

6) $(x+3)^2-|x+3|-30=0$

В

7) $x^2+2x-3|x+1|+3=0$

8) $\dfrac{2x^2-6}{|x|-1}=|x|+3$

9) $|x|\cdot(x^2-4)+3=0$

10) $\dfrac{3}{|x|-2}-\dfrac{9}{|x|+3}=\dfrac{x^2}{x^2+|x|-6}$

11) $4x^2-2|2x-1|-34-4x=0$

12) $x^2-2x-5|x-1|+5=0$

13) $\dfrac{3}{|x+3|-1}=|x+3|$

14) $x^4+x^2+4|x^2-x|=2x^3+12$

ОТВЕТЫ

1) -2; 0

2) -2; 0

3) ± 1; ± 3

4) 0; 2

5) -5; 1

6) -9; 3

7) -3; -2; 0; 1

8) ± 3

9) ± 1; $\dfrac{-1+\sqrt{13}}{2}$; $\dfrac{1-\sqrt{13}}{2}$

10) ± 3

11) -3; 4

12) -3; 0; 2; 5

13) $\dfrac{\sqrt{13}-5}{2}$; $\dfrac{-7-\sqrt{13}}{2}$

14) -1; 2

БЛОК 4. Реши ге уравнени етодо пр уг ов

А

1) $|x| = |7-2x| + 3$

2) $|x+1| + |x-5| = 6$

3) $2|x-1| + 2|x-2| = 6$

4) $|x+2| + |x-3| = 5$

5) $|x+1| + |x| = 1$

В

6) $|x+1| + |x-2| = 2x$

7) $|x-5| - |x-2| = -3$

8) $|3x-5| - 2x = |x+2|$

9) $|x-1| + |8-x| + 2|x-3| = 4$

10) $|2x-1| - |x+4| = 3$

11) $|2x+5| = |x| + 2$

12) $|x-1| - 2|x-2| + 3|x-3| = 4$

13) $\dfrac{|x-3|}{|x-2|-1} = 1$

14) $|x| + |x-4| + |x-5| = 12$

15) $|3x-8| - |3x-2| = 6$

ОТВЕТЫ

1) $\frac{10}{3}$; 4

2) $[-1;5]$

3) 0; 3

4) $[-2;3]$

5) $[-1;0]$

6) 1,5

7) $[5;\infty)$

8) $\frac{1}{2}$

9) $\varnothing$

10) -2; 8

11) -7; -1

12) $[1;2]\cup\{5\}$

13) $(3;\infty)$

14) -1; 7

15) $\left(-\infty;\frac{2}{3}\right]$

БЛОК 5. **Решите системы уравнений, содержащие неизвестное под знаком модуля:**

В

1) $\begin{cases} y = |x| \\ \frac{1}{2}x^3 - y = 0 \end{cases}$ 2) $\begin{cases} |y-1| + x - 2 = 0 \\ 2x + y = 3 \end{cases}$ 3) $\begin{cases} |x-3| = 4 \\ x + 2y = 5 \end{cases}$

4) $\begin{cases} |x+1| + 2y = 1 \\ x + y = 5 \end{cases}$ 5) $\begin{cases} x^2 - 2|x| - 3 = 0 \\ x + y = 6 \end{cases}$ 6) $\begin{cases} |x| + y = 1 \\ x^2 + y^2 = 5 \end{cases}$

7) $\begin{cases} x + y = 2 \\ |3x - y| = 1 \end{cases}$ 8) $\begin{cases} x + 2y = 2 \\ |2x - 3y| = 1 \end{cases}$ 9) $\begin{cases} |x| + y = 5 \\ x + 4y = 5 \end{cases}$

10) $\begin{cases} x + 3|y| = 2 \\ 3x - y = 1 \end{cases}$ 11) $\begin{cases} y - x = 1 \\ x + |y| = 1 \end{cases}$ 12) $\begin{cases} |x-1| + y = 0 \\ 2x - y = 1 \end{cases}$

13) $\begin{cases} y + x - 1 = 0 \\ |y| - x - 1 = 0 \end{cases}$ 14) $\begin{cases} |y| = x - 3 \\ y = x^2 - 8x + 15 \end{cases}$

ОТВЕТЫ

1) $(0;0)$; $(\sqrt{2};\sqrt{2})$ 2) $(0;3)$; $\left(\frac{4}{3};\frac{1}{3}\right)$

3) $(-1;3)$; $(7;-1)$ 4) $(10;-5)$

5) $(3;3)$; $(-3;9)$ 6) $(2;-1)$; $(-2;-1)$

7) $\left(\frac{3}{4};\frac{5}{4}\right)$; $\left(\frac{1}{4};\frac{7}{4}\right)$ 8) $\left(\frac{8}{7};\frac{3}{7}\right)$; $\left(\frac{4}{7};\frac{5}{7}\right)$

9) $(5;0)$; $(-3;2)$ 10) $\left(\frac{1}{2};\frac{1}{2}\right)$; $\left(\frac{1}{8};-\frac{5}{8}\right)$

11) $(0;1)$ 12) $(0;-1)$

13) $(0;1)$ 14) $(3;0)$; $(4;-1)$; $(6;3)$

БЛОК 6. **Решите уравнения:**

С

1) $\sqrt{\left(x^2-3x+2\right)^2}=3x-x^2-2$

2) $\dfrac{|x+2|-|x|}{\sqrt{2-x^2}}=0$

3) $\left|6x^2-5x+1\right|=5x-6x^2-1$

4) $\dfrac{\left|x^2+2x+3\right|}{|x-3|}=x+2$

5) $\sqrt{9x^2-12x+4}-\sqrt{4x^2-20x+25}-x=2$

6) $\sqrt{x^2+2x+1}+x=5-\sqrt{x^2}$

7) $(x-2)\left(|x|+\sqrt{3}-1-\dfrac{1}{\sqrt{2}}\right)=0$

8) $\sqrt{|x-7|}=x-1$

9) $\left|x^2-2x+1\right|+|4x+1|=0$

10) $\dfrac{\left|x^2-4x\right|+3}{x^2+|x-5|}=1$

11) $\left|\dfrac{x^2-10x+21}{x^2-12x+32}\right|=-\dfrac{x^2-10x+21}{x^2-12x+32}$

12) $\dfrac{x^2-2|x|+1}{4-x^2}=\dfrac{|x-2|}{x+2}$

13) $2\left(x^2-1\right)=\left(x^2+x\right)(|x|-1)$

14) $\left(x^2-5x+6\right)^2+7|x-2|=0$

15) $\left|x^2-9\right|+\left|x-2\right|=5$

16) $\left|\dfrac{2x-1}{x-1}\right|=\left|\dfrac{2x+1}{x+1}\right|$

17) Найдите все решения уравнения $\left(\left|x\right|+1\right)^2=4\left|x\right|+9$, принадлежащие области определения функции $f(x)=\sqrt{5-2x}$.

18) $\dfrac{\left|2x+1\right|-\left|2x-3\right|-4}{\sqrt{x^2-5x-6}}=0$

ОТВЕТЫ

1) $[1;2]$

2) -1

3) $\left[\dfrac{1}{3};\dfrac{1}{2}\right]$

4) $-\dfrac{3}{2}$; 1

5) $-\dfrac{5}{2}$; $\dfrac{9}{4}$

6) -6; $\dfrac{4}{3}$

7) 2

8) 3

9) $\varnothing$

10) $-\dfrac{2}{3}$; $\dfrac{1}{2}$; 2

11) $[3;4)\cup[7;8)$

12) $\dfrac{3}{2}$

13) ± 1; 2; $\dfrac{-3-\sqrt{17}}{2}$

14) 2

15) -3; 2; $\dfrac{-1+\sqrt{65}}{2}$

16) 0; $\pm\dfrac{\sqrt{2}}{2}$

17) -4

18) $(6;\infty)$

§ 7. РЕШЕНИЕ НЕРАВЕНСТВ С ПЕРЕМЕННОЙ ПОД ЗНАКОМ МОДУЛЯ

БЛОК 1. Решите методом сведения неравенства к равносильному неравенству, системе или совокупности неравенств:

А

1) $|2x-3|\le 4$

2) $|5-8x|<11$

3) $\left|\frac{3x+1}{x-3}\right|<3$

4) $|x^2+19x+34|<-1$

5) $|3x-5|\ge 10$

6) $\left|\frac{2}{x-4}\right|>1$

7) $3|x-1|\le x+3$

8) $|x-2|<2x-10$

9) $\left|\frac{2x+3}{3x-2}\right|>1$

В

10) $\left|\frac{x^2-5x+4}{x^2-4}\right|\le 1$, найдите количество целых решений неравенства, принадлежащих отрезку $[0;5]$.

11) $|x^2-5x|<6$

12) $|2x^2-9x+15|\ge 20$

13) $\left|\frac{x^2-3x+2}{x^2+3x+2}\right|\ge 1$

14) $x^2-5x+9>|x-6|$, найдите наименьшее натуральное решение.

15) $|x^2-2x-3|\le 3x-3$, найдите количество целых решений.

16) $x^2-|5x+6|>0$, найдите наименьшее целое положительное решение.

17) $|x-2x^2|>2x^2-x$

18) $|x^2-6|>4x+1$

19) $|x^2+3x|\ge 2-x^2$, найдите наибольшее целое отрицательное решение.

20) $x \le |x^2 - 2x|$

21) $|x - 1 - x^2| \le |x^2 - 3x + 4|$

22) $|x^2 + x - 2| > |x + 2|$

23) $|x^2 + 2x - 3| - |x^2 - 2x - 8| < 0$, найдите наибольшее целое решение.

24) $\frac{2}{|x-2|} \ge \left|\frac{-3}{2x-1}\right|$

25) $|x| < -x^2 + x + 6$

26) $|4x^2 - 9x + 6| > -x^2 + x - 3$

27) $|x^2 - 6x + 8| - |x - 2| \le 0$

28) $|x^2 + 2x - 4| > 4$

29) $\left|\frac{-x^2 + 5x + 2}{-x^2 - 5x - 24}\right| > 2$

30) $|x^2 - 8x + 15| < x - 3$

ОТВЕТЫ

1) $[-0,5; 3,5]$

2) $\left(-\frac{3}{4}; 2\right)$

3) $\left(-\infty; \frac{4}{3}\right)$

4) $\varnothing$

5) $\left(-\infty; -\frac{5}{3}\right] \cup [5; \infty)$

6) $(2; 4) \cup (4; 6)$

7) $[0; 3]$

8) $(8; \infty)$

9) $\left(-\frac{1}{5}; \frac{2}{3}\right) \cup \left(\frac{2}{3}; 5\right)$

10) 5

11) $(-1; 2) \cup (3; 6)$

12) $\left(-\infty; -\frac{1}{2}\right] \cup [5; \infty)$

13) $(-\infty; -2) \cup (-2; -1) \cup (-1; 0]$

14) 4

15) 4

16) 7

17) $\left(0; \frac{1}{2}\right)$

18) $(-\infty; 1)\cup\left(2+\sqrt{11}; \infty\right)$ 19) -1

20) $(-\infty; 1]\cup[3; \infty)$ 21) $\left(-\infty; \frac{3}{2}\right]$

22) $(-\infty; -2)\cup(-2; 0)\cup(2; \infty)$ 23) 2

24) $(-\infty; -4]\cup\left[1\frac{1}{7}; 2\right)\cup(2; \infty)$ 25) $\left(1-\sqrt{7}; \sqrt{6}\right)$

26) $(-\infty; \infty)$ 27) $\{2\}\cup[3; 5]$

28) $(-\infty; -4)\cup(-2; 0)\cup(2; \infty)$ 29) $(-10; -5)$

30) $(4; 6)$

БЛОК 2. Решите неравенства методом, основанным на раскрытии модуля по определению:

А

1) $\frac{x^2-1}{|x|-1}>0$ 2) $2x<|x|+1$ 3) $\frac{x^2+6x-7}{|x+4|}<0$

4) $\frac{x^2+3x-10}{|x+1|}<0$

В

5) $\frac{|x-3|}{x^2-5x+6}\geq 2$ 6) $\frac{|x+3|+x}{x+2}>1$ 7) $||x-1|-5|\leq 2$

8) $\frac{2x-5}{|x-1|}\leq 1$ 9) $3x^2-|x-3|>9x-2$ 10) $x^2+x-10<2|x-2|$

11) $\frac{|x-1|}{x+2}<1$ 12) $\frac{1}{|x|-3}<\frac{1}{2}$

ОТВЕТЫ

1) $(-\infty;-1)\cup(-1;1)\cup(1;\infty)$

2) $(-\infty;1)$

3) $(-7;-4)\cup(-4;1)$

4) $(-5;-1)\cup(-1;2)$

5) $\left[\frac{3}{2};2\right)$

6) $(-5;-2)\cup(-1;\infty)$

7) $[-6;-2]\cup[4;8]$

8) $(-\infty;1)\cup(1;4]$

9) $\left(-\infty;\frac{4-\sqrt{19}}{3}\right)\cup\left(\frac{4+\sqrt{19}}{3};\infty\right)$

10) $\left(\frac{-3-\sqrt{65}}{2};3\right)$

11) $(-\infty;-2)\cup\left(-\frac{1}{2};\infty\right)$

12) $(-\infty;-5)\cup(-3;3)\cup(5;\infty)$

БЛОК 3. Решите неравенства методом введения новой переменной:

A

1) $x^2-|x|-12<0$

2) $x^2-5|x|+6<0$

B

3) $\left|x^2-5|x|+4\right|\geq\left|2x^2-3|x|+1\right|$

4) $(x-7)^2-|x-7|<30$

5) $(|x-3|-5)(|x-3|+4)\leq 0$

6) $\left|\frac{2-3|x|}{1+|x|}\right|<1$

7) $(|2x-1|-3)(|2x-1|-1)>0$

8) $x^2-8x-\frac{3}{|x-4|}+18\leq 0$

9) $\frac{x^2+|x|-2}{x^2+|x|-6}>0$

10) $\frac{|x-1|+10}{4|x-1|+3}>2$

ОТВЕТЫ

1) $(-4;4)$ 2) $(-3;-2)\cup(2;3)$ 3) $\left[-\frac{5}{3};\frac{5}{3}\right]$ 4) $(1;13)$

5) $[-2; 8]$ 6) $\left(-\frac{3}{2}; -\frac{1}{4}\right) \cup \left(\frac{1}{4}; \frac{3}{2}\right)$ 7) $(-\infty; -1) \cup (0; 1) \cup (2; \infty)$

8) $[3; 4) \cup (4; 5]$ 9) $(-\infty; -2) \cup (-1; 1) \cup (2; \infty)$ 10) $\left(\frac{3}{7}; \frac{11}{7}\right)$

<u>БЛОК 4</u>. Решите нераве тва методом промежутк в·

В

1) $|x-2| > 2+x-|3-x|$

2) $|x+3| < 3+|x|$

3) $|x-1|+|2-x| > 3+x$

4) $|x-4|+|2x+6| > 10$

5) $|x+2|+|x-2| \geq 12$

6) $|x-1| > |3x-1|-10$

7) $|x-1|+|x+2| \leq 3$

8) $|x-3|+|2+x| \leq 2x+3$

9) $|5-2x|+|x+3| \geq 5$

10) $|x|+|2x+1|-x > 1$

ОТВЕТЫ

1) $(-\infty; 1) \cup (7; \infty)$ 2) $(-\infty; 0)$ 3) $(-\infty; 0) \cup (6; \infty)$

4) $(-\infty; -4) \cup (0; \infty)$ 5) $(-\infty; -6] \cup [6; \infty)$ 6) $(-5; 5)$

7) $[-2; 1]$ 8) $[1; \infty)$ 9) $(-\infty; \infty)$

10) $(-\infty; -0{,}5) \cup (0; \infty)$

<u>БЛОК 5</u>. Решите системы неравенств:

А

1) $\begin{cases} |x| \leq -x \\ |x+2| > 1 \end{cases}$ 2) $\begin{cases} |x| \geq 1 \\ |x-1| < 3 \end{cases}$ 3) $\begin{cases} x^2+5x+6 \leq 0 \\ |x+4| = 2 \end{cases}$

4) $\begin{cases} |x-1|=2 \\ x^2-5x+6\ge 0 \end{cases}$ 5) $\begin{cases} |x-3|\le 2 \\ |3-2x|\le 1 \end{cases}$ 6) $\begin{cases} |2x-5|<5 \\ |5x+1|<21 \end{cases}$

B

7) $\begin{cases} |x^2+5x|<6 \\ |x+1|\le 1 \end{cases}$

8) $\begin{cases} |2x^2-23x+13|<25 \\ x>8 \end{cases}$

9) $\begin{cases} \dfrac{x^2-5x+11}{x^2-x-2}+\dfrac{7}{x+1}\le 0 \\ |2x+3|\ge 3 \end{cases}$

10) $\begin{cases} \dfrac{x^2-5x+4}{x^2+2x-15}\le 0 \\ |x+2|>5 \end{cases}$

11) $\begin{cases} \dfrac{x^2-4x+4}{3+4x+x^2}\le 0 \\ |x+1|<4 \end{cases}$

12) $\begin{cases} x+3\ge \dfrac{18}{x} \\ |x+1|<5 \end{cases}$

13) $\begin{cases} \dfrac{4x^2+5}{1+4x+4x^2}\ge 1 \\ |1-x|<2 \end{cases}$

14) $\begin{cases} \dfrac{x^3+x^2-4x-4}{x^2+3x+2}\ge 0 \\ |x|\le 2 \end{cases}$

15) $\begin{cases} \dfrac{x^2-2x+3}{x^2-4x+3}\ge -3 \\ |x|\le 4 \end{cases}$

16) $\begin{cases} \dfrac{2}{x}<x+1 \\ |x-3|\le 4 \end{cases}$

17) $\begin{cases} \dfrac{x^2+10x+25}{5+4x-x^2}\ge 0 \\ |x+1|>3 \end{cases}$

18) $\begin{cases} \dfrac{x^2-x+6}{x^2-3x+2}\ge \dfrac{2x}{x-2} \\ |2x-3|\ge 3 \end{cases}$

19) $\begin{cases} |x^2-4x|<5 \\ |x+1|<3 \end{cases}$

20) $\begin{cases} |2x-3|\le 1 \\ x^2-4x+3\ge 0 \end{cases}$

ОТВЕТЫ

1) $(-\infty;-3)\cup(-1;0]$ 2) $(-2;-1]\cup[1;4)$ 3) $x=-2$

4) $\{-1;3\}$ 5) $[1;2]$ 6) $(0;4)$

7) $(-2;0]$ 8) $\left(\frac{19}{2};12\right)$ 9) $\{-3\}\cup[1;2)$

10) $(3;4]$ 11) $(-3;-1)\cup\{2\}$ 12) $(-6;0)\cup[3;4)$

13) $\left(-1;-\frac{1}{2}\right)\cup\left(-\frac{1}{2};1\right]$ 14) $x=2$ 15) $[-4;1)\cup\left[\frac{3}{2};2\right]\cup(3;4]$

16) $[-1;0)\cup(1;7]$ 17) $\{-5\}\cup(2;5)$ 18) $[-2;0]\cup\{3\}$

19) $(-1;2)$ 20) $x=1$

БЛОК 6. **Решите неравенства:**

С

1) $4|x-5|-x^2+10x-20>0$

2) $\dfrac{x^2-7|x|+10}{x^2-6x+9}<0$

3) $\dfrac{|x^2-4x|+3}{x^2+|x-5|}\geq 1$

4) $|5-x|<|2-x|+|2x-7|$

5) $\big||2x^2-x|-3\big|\leq 2x^2+x+5$

6) $\left|\dfrac{x^2-5x+4}{x^2-4}\right|\leq 1$

7) $\sqrt{\dfrac{x^2-4x+4}{x^2+6x+9}}-18\sqrt{\dfrac{x^2+6x+9}{x^2-4x+4}}>3$

8) $\dfrac{x^2+2|x|-2}{x+1}\leq 3x$

9) $\begin{cases}\dfrac{28-x^2}{9}-\dfrac{x}{3}\geq 0\\ |x+7|\cdot(3x+7)\geq 0\end{cases}$

10) $\begin{cases}\dfrac{2x^2+2x-11}{x^2+x+1}\leq 1\\ |x+4|\cdot(2x+1)\geq 0\end{cases}$

11) $\frac{1}{|x-9|} \le \frac{x-3}{4x-11}$

12) $\frac{4}{|x+3|-1} \ge |x+2|$

13) $1 < 3^{|x^2-x|} < 9$

14) $|2^{2x} - 3\cdot 2^x + 2| > |4^x - 3\cdot 2^x - 10|$

15) $\frac{|2-x|-x}{|x-3|-1} \le 2$

16) $\frac{|x+3|-1}{4-2|x+4|} \ge -1$

17) $|x|\cdot(x^2-2x-3) \ge 0$

18) $\frac{1}{|x|}(x^4-6x^2-16) \le 0$

19) $|x^2-1| < x^2 - |x| + 1$

20) $(2-x+x^2)^{0,5} \le |x-3|$

ОТВЕТЫ

1) $(0;10)$

2) $(-5;-2)\cup(2;3)\cup(3;5)$

3) $\left(-\infty;-\frac{2}{3}\right]\cup\left[\frac{1}{2};2\right]$

4) $(-\infty;2)\cup\left(\frac{7}{2};\infty\right)$

5) $[-4;\infty)$

6) $\left[0;\frac{8}{5}\right]\cup\left[\frac{5}{2};\infty\right)$

7) $(-4;-3)\cup\left(-3;-\frac{16}{7}\right)$

8) $[-2;-1)\cup\left[-\frac{1}{2};\infty\right)$

9) $\{-7\}\cup\left[-\frac{7}{3};4\right]$

10) $\{-4\}\cup\left[-\frac{1}{2};3\right]$

11) $\left(-\infty;\frac{11}{4}\right)\cup\{4\}\cup\left[8+\sqrt{26};\infty\right)$

12) $\left[-3-\sqrt{5};-4\right)\cup(-2;0]$

13) $(-1;0)\cup(0;1)\cup(1;2)$

14) $(2;\infty)$

15) $(-\infty;2)\cup\{3\}\cup(4;\infty)$

16) $(-\infty;-8]\cup(-6;-2)\cup(-2;\infty)$

17) $(-\infty;-1]\cup\{0\}\cup[3;\infty)$

18) $\left[-2\sqrt{2};0\right)\cup\left(0;2\sqrt{2}\right]$

19) $\left(-2;-\frac{1}{2}\right)\cup\left(\frac{1}{2};2\right)$

20) $(-\infty;1,4]$

§1. ТОЖДЕСТВЕННЫЕ ПРЕОБРАЗОВАНИЯ ИРРАЦИОНАЛЬНЫХ АЛГЕБРАИЧЕСКИХ ВЫРАЖЕНИЙ

БЛОК 1. Сократите:

А

1) $\dfrac{3-3\sqrt[3]{9}a+3\sqrt[3]{3}a^2-a^3}{\left(\sqrt[3]{3}-a\right)^2}$

2) $\dfrac{\left(\sqrt{3}+b\right)^2}{3\sqrt{3}+9b+3\sqrt{3}b^2+b^3}$

3) $\dfrac{1-\sqrt{b}+\sqrt[4]{b}-\sqrt[4]{b^3}}{\sqrt{b}-b}$

4) $\dfrac{2\sqrt{2mn}-m\sqrt{2}}{2n-\sqrt{mn}}$

5) $\dfrac{\sqrt[3]{ab}+\sqrt[3]{ac}}{\sqrt[3]{bc}+\sqrt[3]{c^2}}$

6) $\dfrac{\left(\sqrt{x}-\sqrt{y}\right)^2-x}{\sqrt{y}\left(\sqrt{y}-2\sqrt{x}\right)}$

7) $\dfrac{x\sqrt{x}+9x+27\sqrt{x}+27}{x+6\sqrt{x}+9}$

8) $\dfrac{\sqrt{a}-\sqrt{b}}{\sqrt[4]{a}-\sqrt[4]{b}}$

9) $\dfrac{\sqrt[4]{x}-\sqrt[4]{y}+\sqrt{x}-\sqrt{y}}{\sqrt[4]{x}+\sqrt[4]{y}+1}$

10) $\dfrac{x+\sqrt{x}+y-\sqrt{y}-2\sqrt{xy}}{\sqrt{x}-\sqrt{y}}$

11) $\dfrac{\sqrt{\sqrt{x}+\sqrt{y}}\cdot\sqrt{\sqrt{x}-\sqrt{y}}}{y-x}$

12) $\dfrac{\sqrt[3]{\sqrt{x}}+\sqrt{\sqrt[3]{y}}}{\sqrt[3]{y}+2\sqrt[6]{xy}+\sqrt[3]{x}}$

13) $\dfrac{x\sqrt{x}+y\sqrt{x}-x\sqrt{y}}{x\sqrt{x}+y\sqrt{y}}$

14) $\dfrac{x+\sqrt{8x}+2}{x+\sqrt{2x}-2\sqrt{x}-2\sqrt{2}}$

В

15) $\dfrac{2+\sqrt{x}-x}{\sqrt{x}-2}$

16) $\dfrac{1+2\sqrt{x}}{4x-6\sqrt{x}-4}$

17) $\dfrac{2x+3\sqrt{x}-2}{2+\sqrt{x}}:\dfrac{3-\sqrt{x}}{5\sqrt{x}-2x+3}$

18) $\dfrac{-5\sqrt{x}-2x+3}{1-2\sqrt{x}}\cdot\dfrac{5\sqrt{x}-x-6}{\sqrt{x}-2}$

19) $\dfrac{ab-\sqrt[3]{ab}}{\sqrt[3]{ab}+1}$

20) $\dfrac{2\sqrt{1-x^2}+x^2-2}{1-\sqrt{1-x}\cdot\sqrt{x+1}}$

21) $\dfrac{1-\sqrt{a-3}}{4-a}$, найдите, при каких значениях a дробь принимает наибольшее значение.

22) $\dfrac{1-x}{2-\sqrt{x+3}}$, найдите наименьшее значение выражения.

23) $\dfrac{x-2\sqrt[3]{x}+1}{x+2\sqrt[3]{x^2}-1}$

24) $\dfrac{x^{\frac{5}{24}}-3x^{\frac{1}{24}}}{x^{\frac{3}{8}}-9x^{\frac{1}{24}}}$

25) $\dfrac{y^{\frac{6}{7}}+y^{\frac{5}{7}}+y^{\frac{4}{7}}+y^{\frac{3}{7}}}{y^{\frac{3}{7}}+y^{\frac{2}{7}}+y^{\frac{1}{7}}+1}$

26) $\dfrac{x+9}{\sqrt{-x}+3}$

27) $\dfrac{36+x}{6-\sqrt{-x}}$

28) $\dfrac{\sqrt{ab}+a}{\sqrt{-a}}$

29) $\dfrac{a+\sqrt{ab}}{b+\sqrt{ab}}$, если $a<0$; $b<0$

30) $\dfrac{x+y-2\sqrt{xy}}{\sqrt{-x}+\sqrt{-y}}$

ОТВЕТЫ

1) $\sqrt[3]{3}-a$

2) $\dfrac{1}{\sqrt{3}+b}$

3) $\dfrac{1+\sqrt[4]{b}}{\sqrt{b}}$

4) $\sqrt{\dfrac{2m}{n}}$

5) $\sqrt[3]{\dfrac{a}{c}}$

6) 1

7) $\sqrt{x}+3$

8) $\sqrt[4]{a}+\sqrt[4]{b}$

9) $\sqrt[4]{x}-\sqrt[4]{y}$

10) $\sqrt{x}-\sqrt{y}+1$

11) $-\frac{1}{\sqrt{x-y}}$

12) $\frac{1}{\sqrt[6]{x}+\sqrt[6]{y}}$

13) $\frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x}+\sqrt{y}}$

14) $\frac{\sqrt{x}+\sqrt{2}}{\sqrt{x}-2}$

15) $-\left(\sqrt{x}+1\right)$

16) $\frac{1}{2\left(\sqrt{x}-2\right)}$

17) $4x-1$

18) $9-x$

19) $\sqrt[3]{a^2b^2}-\sqrt[3]{ab}$

20) $\sqrt{1-x^2}-1$

21) $a=3$

22) 2

23) $\frac{\sqrt[3]{x}-1}{\sqrt[3]{x}+1}$

24) $\frac{1}{x^{\frac{1}{6}}+3}$

25) $y^{\frac{3}{7}}$

26) $3-\sqrt{-x}$

27) $6+\sqrt{-x}$

28) $\sqrt{-b}-\sqrt{-a}$

29) $-\sqrt{\frac{a}{b}}$

30) $-\left(\sqrt{-x}+\sqrt{-y}\right)$

БЛОК 2. Освободитесь от иррациональности в знаменателе дроби:

А

1) $\frac{1}{\sqrt[3]{a}-\sqrt[3]{b}}$

2) $\frac{x-2}{\sqrt{x-1}+1}$

3) $\frac{4}{\sqrt{c}-1}$

4) $\frac{1}{2\sqrt{x}+3\sqrt{y}}$

5) $\frac{x+1}{\sqrt{x+2}-1}$

6) $\frac{x+y}{\sqrt[3]{x^2}+\sqrt[3]{y^2}-\sqrt[3]{xy}}$

7) $\frac{a-1}{\sqrt{a-1}-\sqrt{a+2}}$

8) $\frac{(x-y)z}{\sqrt[3]{xy}+\sqrt[3]{x^2}+\sqrt[3]{y^2}}$

В

9) $\frac{m+n+\sqrt{m^2-n^2}}{m+n-\sqrt{m^2-n^2}}$

10) $\frac{\sqrt{x^2+1}-\sqrt{x^2-1}}{\sqrt{x^2+1}+\sqrt{x^2-1}}$

11) $\frac{1}{\sqrt{a}-\sqrt[4]{b}}$

12) $\dfrac{\sqrt[3]{a^2b^2}}{\sqrt[3]{a^2}-\sqrt[3]{ab}+\sqrt[3]{b^2}}$ 13) $\dfrac{\sqrt[3]{x}}{\sqrt[3]{x}-\sqrt[3]{x^2}+x}$ 14) $\dfrac{\sqrt{x+y}-\sqrt{x-y}}{\sqrt{x+y}+\sqrt{x-y}}$

ОТВЕТЫ

1) $\dfrac{\sqrt[3]{a^2}+\sqrt[3]{ab}+\sqrt[3]{b^2}}{a-b}$ 2) $\sqrt{x-1}-1$ 3) $\dfrac{4\left(\sqrt{c}+1\right)}{c-1}$

4) $\dfrac{2\sqrt{x}-3\sqrt{y}}{4x-9y}$ 5) $\sqrt{x+2}+1$ 6) $\sqrt[3]{x}+\sqrt[3]{y}$

7) $\dfrac{(1-a)\left(\sqrt{a-1}+\sqrt{a+2}\right)}{3}$ 8) $z\left(\sqrt[3]{x}-\sqrt[3]{y}\right)$ 9) $\dfrac{m+\sqrt{m^2-n^2}}{n}$

10) $x^2-\sqrt{x^4-1}$ 11) $\dfrac{a\sqrt{a}+a\sqrt[4]{b}+\sqrt{ab}+\sqrt[4]{b^3}}{a^2-b}$

12) $\dfrac{a\sqrt[3]{b^2}+b\sqrt[3]{a^2}}{a+b}$ 13) $\dfrac{1+\sqrt[3]{x}}{1+x}$ 14) $\dfrac{x-\sqrt{x^2-y^2}}{y}$

БЛОК 3. Упростите ирра иональные алгебраические выражения:

А

1) $\left(\dfrac{a\sqrt{a}+b\sqrt{b}}{\sqrt{a}+\sqrt{b}}-\sqrt{ab}\right)\cdot\left(\dfrac{\sqrt{a}+\sqrt{b}}{a-b}\right)^2$

2) $\left(\dfrac{x^2+y^2}{x\sqrt{y}+\sqrt{x^3}}-\dfrac{x+y}{\sqrt{y}+\sqrt{x}}\right)\cdot xy^{-1}$

3) $\dfrac{3a\sqrt{a}-3a\sqrt{b}+3b\sqrt{a}}{a\sqrt{a}+b\sqrt{b}}-\dfrac{3\sqrt{a}}{\sqrt{a}+\sqrt{b}}$

4) $\dfrac{\left(\sqrt[4]{ab}-\sqrt{b}\right)\left(\sqrt[4]{a}+\sqrt[4]{b}\right)}{\left(\sqrt{a}-\sqrt{b}\right)\left(\sqrt{a}+\sqrt{b}\right)}\cdot\left(\dfrac{\sqrt[4]{b}}{\sqrt{a}+\sqrt{b}}\right)^{-1}$

5) $\left(\frac{\sqrt{x^3}+\sqrt{y^3}}{\sqrt{x}+\sqrt{y}}-\sqrt{xy}\right)\cdot\left(\frac{\sqrt{x}+\sqrt{y}}{x-y}\right)^2$, вычислите, если $x=9$; $y=4$.

6) $\left(\frac{a\sqrt{a}+b\sqrt{b}}{\sqrt{a}+\sqrt{b}}-\sqrt{ab}\right):(a-b)+\frac{2\sqrt{b}}{\sqrt{a}+\sqrt{b}}$

7) $\left(\frac{4\sqrt{x}}{\sqrt{4x+1}}-\sqrt{4x+1}\right)\cdot\left(1-2\sqrt{x}\right)^{-2}$

8) $\left(\frac{a+1}{\sqrt{a}}+\frac{1}{a-\sqrt{a}}-\frac{a}{\sqrt{a}+1}\right)\cdot\frac{1-a}{1+a}$

9) $a\cdot\left(\frac{\sqrt{a}+\sqrt{b}}{2b\sqrt{a}}\right)^{-1}+b\cdot\left(\frac{\sqrt{a}+\sqrt{b}}{2a\sqrt{b}}\right)^{-1}$

10) $\left(\frac{\sqrt{a}+2}{a+2\sqrt{a}+1}-\frac{\sqrt{a}-2}{a-1}\right)\cdot\frac{\sqrt{a}+1}{\sqrt{a}}$

11) $\frac{\sqrt{a}-1}{a-\sqrt{a}}-\frac{3}{\sqrt{a}}+\frac{2}{\sqrt{a}-1}$

12) $\left(\frac{x-1}{\sqrt[3]{x}-1}+\sqrt[3]{x}\right)\cdot\frac{\sqrt[3]{x}-1}{\sqrt[3]{x^2}-1}$

13) $\frac{1}{a+\sqrt{a^2-b^2}}+\frac{1}{a-\sqrt{a^2-b^2}}$

14) $\left(\sqrt{a}+\frac{ab^2+c}{\sqrt{ab^2+c}}\right):\left(b\sqrt{a}+b\sqrt{ab^2+c}\right)$

15) $\frac{x-y}{\sqrt{x}-\sqrt{y}}-\frac{x\sqrt{x}-y^{\frac{3}{2}}}{x-y}$

16) $\sqrt{\sqrt{a}+\sqrt{a+b^2}}\cdot\sqrt{\sqrt{a+b^2}-\sqrt{a}}$

17) $\left(1+\sqrt{\dfrac{a-x}{a+x}}\right)\cdot\left(1-\sqrt{\dfrac{a-x}{a+x}}\right)$, вычислите, если $a=5$; $x=4$.

В

18) $\left(\dfrac{\sqrt{b}+c^2}{c^2}-\dfrac{\sqrt{b}-c^2}{\sqrt{b}}\right):\left(\dfrac{\sqrt{b}}{\sqrt{b}-c^2}-\dfrac{c^2}{\sqrt{b}+c^2}\right)$

19) $\left(\dfrac{\sqrt{a}}{2}-\dfrac{1}{2\sqrt{a}}\right)^2\cdot\left(\dfrac{\sqrt{a}-1}{\sqrt{a}+1}-\dfrac{\sqrt{a}+1}{\sqrt{a}-1}\right)\cdot\dfrac{\sqrt{a}}{1-a}$

20) $\left(\dfrac{\sqrt{x}-\sqrt{y}}{x\sqrt{y}+\sqrt{x}\,y}+\dfrac{\sqrt{x}+\sqrt{y}}{x\sqrt{y}-\sqrt{x}\,y}\right)\cdot\dfrac{\sqrt{x^3y}}{x+y}-\dfrac{2y}{x-y}$

21) $\sqrt{a\cdot\sqrt[3]{b}}\quad\left(\sqrt{b}\cdot\sqrt[3]{b^{-1}\sqrt{a^3}}\right)$

22) $\left(\dfrac{x^2}{x^2-\sqrt{y}}-\dfrac{\sqrt{y}}{x^2+\sqrt{y}}\right):\left(\dfrac{x^2+\sqrt{y}}{\sqrt{y}}-\dfrac{x^2-\sqrt{y}}{x^2}\right)$

23) $\left(\dfrac{\sqrt[4]{ab}-\sqrt{ab}}{1-\sqrt{ab}}+\dfrac{1-\sqrt[4]{ab}}{\sqrt[4]{ab}}\right):\dfrac{\sqrt[4]{ab}}{1+\sqrt[4]{ab}}\cdot 4\sqrt{ab}$

24) $\dfrac{a^2+1+a\sqrt{a^2+1}}{a+\sqrt{a^2+1}}\cdot\dfrac{5}{\sqrt{a^2+1}}$

25) $\left(\sqrt{ab}-\dfrac{ab}{\sqrt{ab}+a}\right):\dfrac{\sqrt[4]{ab}-\sqrt{b}}{a-b}-a\left(\sqrt[4]{ab}+\sqrt{b}\right)$

26) $\dfrac{(a-1)\sqrt{a}-(b-1)\sqrt{b}}{\sqrt{a^3b}+ab+a^2-a}-\left(\dfrac{a}{\sqrt{a}-\sqrt{b}}\right)^{-1}+4$

27) $\left(\dfrac{1}{m-\sqrt{mn}}+\dfrac{1}{m+\sqrt{mn}}\right)^{-1}\cdot\left(\dfrac{m^{-2}\cdot n^{-2}}{n^{-2}\cdot m^{-1}-n^{-1}\cdot m^{-2}}\right)$

28) $\left(\frac{b}{b+8}-\frac{4b}{\left(\sqrt[3]{b}+2\right)^3}\right)\cdot\left(\frac{1+2\left(\sqrt[3]{b}\right)^{-1}}{1-2\left(\sqrt[3]{b}\right)^{-1}}\right)^2-\frac{24}{b+8}$

29) $\frac{\sqrt{x}+1}{x\sqrt{x}+x+\sqrt{x}}:\frac{1}{x^2-\sqrt{x}}$

30) $\frac{x-\sqrt{y}}{x+\sqrt{y}}+\frac{x^2-x\sqrt{y}}{x-\sqrt{y}}-\frac{x+\sqrt{y}}{x-\sqrt{y}}+\frac{4x\sqrt{y}}{x^2-y}$

31) $\left(\frac{3}{\sqrt{1+x}}+\sqrt{1-x}\right):\left(\frac{3}{\sqrt{1-x^2}}+1\right)$

32) $\frac{\sqrt{1+x}}{\sqrt{1+x}-\sqrt{1-x}}-\frac{1-x}{\sqrt{1-x^2}-(1-x)}$

33) $\left(\frac{\sqrt{3}+1}{1+\sqrt{3}+\sqrt{x}}+\frac{\sqrt{3}-1}{1-\sqrt{3}+\sqrt{x}}\right)\cdot\left(\sqrt{x}-\frac{2}{\sqrt{x}}+2\right)$

34) $\frac{\sqrt{a+x}+\sqrt{a-x}}{\sqrt{a+x}-\sqrt{a-x}}-\frac{\sqrt{a^2-x^2}}{x}$

35) $\left(\sqrt{\frac{x-3}{2-x}}+\sqrt{\frac{2-x}{x-3}}\right)^{-1}\cdot\frac{1}{\sqrt{3-x}}-\frac{\sqrt{x}}{\sqrt{1-2x^{-1}}}$

ОТВЕТЫ

1) 1

2) $\sqrt{y}-\sqrt{x}$

3) 0

4) 1

5) 1

6) 1

7) $-\frac{1}{\sqrt{4x+1}}$

8) -1

9) $2ab$

10) $\frac{2}{a-1}$

11) $\frac{2}{\sqrt{a}\left(\sqrt{a}-1\right)}$

12) $\sqrt[3]{x}+1$

13) $\frac{2a}{b^2}$ 14) $\frac{1}{b}$ 15) $\frac{\sqrt{xy}}{\sqrt{x}+\sqrt{y}}$ 16) $|b|$

17) $\frac{8}{9}$ 18) $\frac{b-c^4}{c^2\sqrt{b}}$ 19) 1 20) 2

21) 1 22) $\frac{x^2\sqrt{y}}{x^4-y}$ 23) 4 24) 5

25) 0 26) 4 27) $\frac{1}{2}$ 28) -3

29) $x-1$ 30) x 31) $\sqrt{1-x}$ 32) 1

33) $2\sqrt{3}$ 34) $\frac{a}{x}$ 35) $\frac{-2}{\sqrt{x-2}}$

<u>БЛОК 4</u>. Выполните преобразования иррациональных алгебраических выражений, содержащих модули:

А

1) $2a+\sqrt{(a-3)^2}$; если $a<3$

2) $\sqrt[4]{(a-3)^4}+\sqrt{(a-6)^2}$; если $3\le a\le 6$

3) $\sqrt[6]{(b-1)^6}+\sqrt[4]{(2-b)^4}+\sqrt{(b-3)^2}$ · если $2\le b\le 3$

4) $\sqrt{(6-x)^2}-|x-7|$; если $x>7$

5) $\sqrt{81b^2}-\sqrt{36a^2}$; если $a\le 0$, $b\ge 0$

6) $\sqrt[6]{64a^6}-\sqrt[4]{81a^8}$; если $a\le 0$

7) $2\sqrt{x^2}+3\sqrt[3]{x^3}-4\sqrt[4]{x^8}$; если $x\le 0$

8) $(a+b)\sqrt{\dfrac{1}{a^2+2ab+b^2}}$; если $a+b<0$

B

9) $\sqrt{x-4\sqrt{x-3}+1}-\sqrt{x+4\sqrt{x-3}+1}$; если $x=7{,}001$

10) $\sqrt[4]{x-2\sqrt{6x}+6}\quad\sqrt[4]{x+2\sqrt{6x}+6}$; если $x=5$

11) $\sqrt{a+2\sqrt{a-1}}+\sqrt{a-2\sqrt{a-1}}$; если $1<a<2$

12) $\dfrac{\sqrt{(b+2)^2-8b}}{\sqrt{b}-\dfrac{2}{\sqrt{b}}}$; если $b=0{,}0025$

13) $\sqrt{a^2+4a+4}+\sqrt{a^2-4a+4}$; если $-2<a<2$

14) $\dfrac{x^2\cdot\sqrt{(x+4)^2-16x}}{x-4}$; если $x=\sqrt{7}$

15) $\sqrt{2x^2-2x+3-\sqrt{x^4+4x^2+4}}$; если $x\le 1$

16) $\left(a^4\right)^{\frac{1}{4}}+\left(b^{\frac{1}{8}}\right)^4$; если $a=-1{,}5$ и $b=2{,}25$

17) $x^2\cdot\sqrt{x^2-2+\dfrac{1}{x^2}}$; если $x<-1$

18) $\dfrac{\sqrt{(x+3)^2-12x}}{\sqrt{x}-\dfrac{3}{\sqrt{x}}}$

ОТВЕТЫ

1) $a+3$ 2) 3   3) b 4) 1   5) $9b+6a$

6) $-2a-3a^2$ 7) $x-4x^2$ 8) -1 9) -4 10) 1

11) 2   12) $-0{,}05$ 13) 4   14) -7 15) $1-x$

16) 3   17) $x-x^3$ 18) $\begin{cases} \sqrt{x}, & x>3 \\ -\sqrt{x}, & 0<x<3 \end{cases}$

Б.ЛОК 5. Выполните преобразования выражений, содержащих степени с рациональными показателями:

А

1) $$\left(\frac{\left(a^{\frac{3}{4}}+b^{\frac{3}{4}}\right)\left(a^{\frac{3}{4}}-b^{\frac{3}{4}}\right)}{a^{\frac{1}{2}}-b^{\frac{1}{2}}}-(ab)^{\frac{1}{2}}\right)^{\frac{1}{2}} \quad \frac{2}{(a+b)^{\frac{1}{2}}}$$

2) $$\left(\frac{1-y^{\frac{3}{2}}}{1-y^{\frac{1}{2}}}+y^{\frac{1}{2}}\right)\cdot\left(\frac{1+y^{\frac{3}{2}}}{1+y^{\frac{1}{2}}}-y^{\frac{1}{2}}\right)$$

3) $$\left(\left(\frac{x^{\frac{1}{2}}-y^{\frac{1}{2}}}{x^{\frac{3}{2}}-y^{\frac{3}{2}}}\right)^{-1}+(xy)^{\frac{1}{2}}\right):\left(x^{\frac{1}{2}}+y^{\frac{1}{2}}\right)$$

4) $$\frac{\sqrt[3]{5}\cdot b^{\frac{2}{3}}-4}{\sqrt[6]{5}\cdot b^{\frac{1}{3}}+2}-\sqrt[6]{5}\cdot\sqrt[3]{b}$$

5) $$\left(\frac{1+x^{1,5}}{1-x^{0,5}+x}-x^{0,5}\right)\cdot\left(\frac{1-x}{1-x^{0,5}}\right)$$

6) $\dfrac{\left(a^{\frac{3}{4}}-b^{\frac{3}{4}}\right)\left(a^{\frac{3}{4}}+b^{\frac{3}{4}}\right)}{\sqrt{a}-\sqrt{b}}$, вычислите, если $a=\dfrac{1}{12}$; $b=8\dfrac{1}{3}$.

7) $\left(\left(a^{-\frac{3}{2}}b\right)\cdot\left(ab^{-2}\right)^{-\frac{1}{2}}\cdot\left(a^{-1}\right)^{-\frac{2}{3}}\right)^{3}$

8) $\left(\dfrac{x^{\frac{1}{2}}y^{\frac{1}{2}}}{x-y}-\dfrac{y^{\frac{1}{2}}}{2x^{\frac{1}{2}}-2y^{\frac{1}{2}}}\right):\dfrac{2y^{\frac{1}{2}}}{x-y}$

9) $\dfrac{1-a^{-\frac{1}{2}}}{1+\left(\sqrt{a}\right)^{-1}}+\dfrac{1+\sqrt{a^{-1}}}{1-a^{-\frac{1}{2}}}$

10) $\dfrac{a^{\frac{3}{2}}-b^{\frac{3}{2}}}{a^{\frac{1}{2}}+b^{\frac{1}{2}}}\cdot\dfrac{a-b}{a+a^{\frac{1}{2}}b^{\frac{1}{2}}+b}+2a^{\frac{1}{2}}b^{\frac{1}{2}}$

11) $\left(2\sqrt{a}-a-1\right):\left(a^{-\frac{1}{4}}-a^{\frac{1}{4}}\right)^{2}$

B

12) $\dfrac{a^{\frac{3}{2}}+b^{\frac{3}{2}}}{\left(a^{2}-ab\right)^{\frac{2}{3}}}:\dfrac{a^{-\frac{2}{3}}\cdot\left(a-b\right)^{\frac{1}{3}}}{a\sqrt{a}-b\sqrt{b}}$, вычислите, если $a=1{,}2$; $b=0{,}6$.

13) $\dfrac{8a}{3}-\left(\dfrac{3a^{-\frac{1}{3}}+2}{3a^{-\frac{1}{3}}-2}\right)^{2}:\left(\dfrac{4}{\left(2a^{\frac{1}{3}}-3\right)^{3}}-\dfrac{1}{8a-27}\right)$

14) $\sqrt{x\sqrt{x\sqrt{x\sqrt{x}}}}:x^{\frac{11}{16}}$

15) $\dfrac{(a-b)^{\frac{1}{2}}\cdot(a-b)^{\frac{1}{3}}\cdot(a-b)^{\frac{1}{6}}}{\sqrt{a}+\sqrt{b}}$, вычислите, если $a=72,25$; $b=12,25$.

16) $\dfrac{y^{\frac{1}{3}}z^{\frac{1}{2}}-z}{y^{\frac{2}{3}}-z}+\dfrac{y}{y+y^{\frac{2}{3}}z^{\frac{1}{2}}}$

17) $\dfrac{a-b}{a^{\frac{3}{4}}+a^{\frac{1}{2}}b^{\frac{1}{4}}}-\dfrac{a^{\frac{1}{2}}-b^{\frac{1}{2}}}{a^{\frac{1}{4}}+b^{\frac{1}{4}}}$, вычислите, если $a=\dfrac{1}{16}$; $b=\dfrac{1}{81}$.

18) $\left(\dfrac{a^{\frac{1}{3}}}{a^{\frac{1}{2}}-b^{\frac{1}{2}}}-\dfrac{a^{\frac{1}{6}}-b^{\frac{1}{6}}}{a^{\frac{1}{3}}+a^{\frac{1}{6}}b^{\frac{1}{6}}+b^{\frac{1}{3}}}\right)\cdot\dfrac{ab^{-\frac{1}{6}}-b^{\frac{5}{6}}}{2a^{\frac{1}{6}}-b^{\frac{1}{6}}}$

19) $1-x^{6}\left(x^{-2,7}-x^{-2,3}\right)\left(x^{-3,3}+x^{-2,9}+x^{-2,5}\right)$

20) $\dfrac{a^{1,5}-b^{1,5}}{a^{0,5}}:\left(\dfrac{a^{0,5}+b^{0,5}}{a^{0,5}}-\dfrac{b^{0,5}}{a^{0,5}+b^{0,5}}\right)$

ОТВЕТЫ

1) 2 2) $(1-y)^2$ 3) $x^{\frac{1}{2}}+y^{\frac{1}{2}}$ 4) -2 5) $1+x^{0,5}$

6) $9\dfrac{1}{4}$ 7) $\dfrac{b^6}{a^4}$ 8) $\dfrac{x^{\frac{1}{2}}-y^{\frac{1}{2}}}{4}$ 9) $\dfrac{2a+2}{a-1}$ 10) $a+b$

11) $-\sqrt{a}$ 12) 2,52 13) 9 14) $x^{\frac{1}{4}}$ 15) 5

16) 1 17) $\dfrac{2}{27}$ 18) $a^{\frac{1}{2}}+b^{\frac{1}{2}}$ 19) $x^{1,2}$ 20) $a-b$

БЛОК 6. **Выполните преобразования иррациональных выражений:**

C

1) $\left(\dfrac{\left(\sqrt[4]{a}+\sqrt[4]{b}\right)^2-\sqrt[4]{16ab}}{a-b}+\dfrac{1}{\sqrt{a}+\sqrt{b}}-\left(\dfrac{a-b}{2\sqrt{b}}\right)^{-1}\right)^{-1}$

2) $\dfrac{\left(\sqrt{m}-\sqrt{n}\right)^3+2m^2:\sqrt{m}+n\sqrt{n}}{m\sqrt{m}+n\sqrt{n}}+\dfrac{3\sqrt{mn}-3n}{m-n}$

3) $\left(\left(1-x^2\right)^{-\frac{1}{2}}+1+\dfrac{1}{\left(1-x^2\right)^{-\frac{1}{2}}-1}\right)^{-2}:\left(2-x^2-2\sqrt{1-x^2}\right)$

4) $\dfrac{\left(\left(\sqrt[4]{a}+\sqrt[4]{b}\right)^2-\left(\sqrt[4]{a}-\sqrt[4]{b}\right)^2\right)^2-(16a+4b)}{4a-b}+\dfrac{10\sqrt{a}-3\sqrt{b}}{2\sqrt{a}+\sqrt{b}}$

5) $\dfrac{a^2+2a-3+(a+1)\sqrt{a^2-9}}{a^2-2a-3+(a-1)\sqrt{a^2-9}}$

6) $\sqrt{x+2\sqrt{x-1}}+\sqrt{x-2\sqrt{x-1}}$, если $1\le x\le 2$

7) $\dfrac{\sqrt{a^2-2ab+b^2}}{\sqrt{a^2+2ab+b^2}}+\dfrac{2a}{a+b}$, если $0<a<b$

8) $\dfrac{x+6\sqrt{x}+8}{\sqrt{x}+4}-\dfrac{x+6\sqrt{x-2}+6}{\sqrt{x-2}+4}$

9) $\left(\dfrac{\sqrt[4]{ab}-\sqrt{b}}{\sqrt{a}-\sqrt[4]{ab}}\right)^{-4}$

10) $\sqrt{\dfrac{a-b}{a+b}}-\dfrac{2a\sqrt{a^2-b^2}}{b^2\left(ab^{-1}+1\right)^2}\cdot\dfrac{1}{1+\dfrac{1-ba^{-1}}{1+ba^{-1}}}$

11) $\sqrt[6]{8a\left(7+4\sqrt{3}\right)}\cdot\sqrt[3]{2\sqrt{6}\,a-4\sqrt{2}\,a}$, если $a\ge 0$

12) $\sqrt[5]{9b^6}:\left(\dfrac{1}{3b^3}\right)^{-\frac{3}{20}}\cdot\left(\dfrac{b^5}{3}\right)^{\frac{1}{4}}$

13) $\left(\dfrac{a^{\frac{1}{2}}-a^{\frac{3}{2}}}{a+2a^{\frac{1}{2}}+1}-\sqrt{a}\right):\dfrac{1-a^{\frac{1}{2}}}{\sqrt{a}}$

14) $\dfrac{n+2+\sqrt{n^2-4}}{n+2-\sqrt{n^2-4}}+\dfrac{n+2-\sqrt{n^2-4}}{n+2+\sqrt{n^2-4}}$

15) $\left((a-b)\sqrt{\dfrac{a+b}{a-b}}+a-b\right)\cdot\left((a-b)\left(\sqrt{\dfrac{a+b}{a-b}}-1\right)\right)$

16) $\dfrac{a\left(\dfrac{\sqrt{a}+\sqrt{b}}{2b\sqrt{a}}\right)^{-1}+b\left(\dfrac{\sqrt{a}+\sqrt{b}}{2a\sqrt{b}}\right)^{-1}}{\left(\dfrac{a+\sqrt{ab}}{2ab}\right)^{-1}+\left(\dfrac{b+\sqrt{ab}}{2ab}\right)^{-1}}$

17) $\left(x+\sqrt{x^2-1}\right)^2+\left(x+\sqrt{x^2-1}\right)^{-2}+2\left(1-2x^2\right)$

18) $\left(\dfrac{\left(\sqrt{a}+\sqrt{b}\right)^2-\left(2\sqrt{2}\right)^2}{a-b}-\left(a^{\frac{1}{2}}-b^{\frac{1}{2}}\right)\left(a^{\frac{1}{2}}+b^{\frac{1}{2}}\right)^{-1}\right):\dfrac{(4b)^{\frac{1}{2}}}{a^{\frac{1}{2}}+b^{\frac{1}{2}}}$

19) $\dfrac{\sqrt[3]{a^5b^{\frac{1}{2}}\cdot\sqrt[4]{a^{-1}}}}{\left(a^2\cdot\sqrt[5]{ab^3}\right)^2}$

20) $\left(\frac{\sqrt[4]{a^3}-\sqrt[4]{a}}{1-\sqrt{a}}+\frac{1+\sqrt{a}}{\sqrt[4]{a}}\right)\cdot\left(1+\frac{2}{\sqrt{a}}+\frac{1}{a}\right)^{-\frac{1}{2}}$

ОТВЕТЫ

1) $\frac{\sqrt{a}+\sqrt{b}}{2}$ 2) 3 3) $1-x^2$ 4) 1

5) $\sqrt{\frac{a+3}{a-3}}$ 6) 2 7) 1 8) $\sqrt{x}-\sqrt{x-2}$

9) $\frac{a}{b}$ 10) 0 11) $-2\sqrt{a}$ 12) b^2

13) $\frac{2a^2}{1-a}$ 14) n 15) $2b(a-b)$ 16) $\sqrt{ab}$

17) 0 18) $\frac{2\left(\sqrt{ab}-2\right)}{\sqrt{b}\left(\sqrt{a}-\sqrt{b}\right)}$ 19) $a^{-\frac{169}{60}}\cdot b^{-\frac{31}{30}}$ 20) $\frac{\sqrt[4]{a}}{\sqrt{a}+1}$

§2. РЕШЕНИЕ ИРРАЦИОНАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ

БЛОК 1. Решите уравнения методом возведения в степень обеих частей уравнения:

А

1) $\frac{x+6}{\sqrt{x-2}}=\sqrt{3x+2}$

2) $\sqrt{35-5x}=9-2x$

3) $\sqrt{5-4x-x^2}=-2x-1$

4) $\sqrt{x^2+11x-9}=\sqrt{8x-5}$

5) $\frac{1}{\sqrt{x^2-81}}=\frac{1}{x\sqrt{10}-9\sqrt{10}}$

6) $\frac{\sqrt{5-x^2}}{x+1}=1$

7) $\frac{1+\sqrt{2x+1}}{x}-1=0$

8) $\sqrt{7+\sqrt[3]{x^2+7}}=3$

9) $\sqrt{x^3-5x^2+4}=x-2$

10) $\sqrt{2-x}\cdot\sqrt{1-4x}=x+8$

В

11) $\sqrt{2x-1}+\sqrt{x-2}=\sqrt{x+1}$

12) $\sqrt{2x-1}+\sqrt{2x+1}=\sqrt{2}$

13) $\sqrt{4-x}-\sqrt{5+x}=3$

14) $\sqrt{1+x\sqrt{x^2-36}}=x-1$

15) $\sqrt{2x+3-2\sqrt{2x+1}}=1$

16) $\sqrt{2x+1}+\sqrt{x-3}=2\sqrt{x}$

17) $\sqrt{x+1}+\sqrt{4x+13}=\sqrt{3x+12}$

18) $\sqrt{3x+4}+\sqrt{x-4}=2\sqrt{x}$

19) $\sqrt{15-x}+\sqrt{3-x}=6$

20) $1+\sqrt{1+x\sqrt{x^2-24}}=x$

21) $\sqrt{3x+7}-\sqrt{x+1}=2$

22) $\sqrt{x-9}=\frac{36}{\sqrt{x-9}}-\sqrt{x}$

23) $\sqrt{1+x}-\frac{1}{\sqrt{1+x}}=\sqrt{2+x}$

24) $\sqrt{4-2x}+\sqrt{2+x}=2\sqrt{2}$

25) $\sqrt{3x^2+1}+\sqrt{x^2+3}=\sqrt{6x^2+10}$

ОТВЕТЫ

1) 10	2) 2	3) -2	4) 1	5) 11
6) 1	7) 4	8) ± 1	9) $3+\sqrt{5}$	10) -2
11) 2	12) 0,5	13) -5	14) 10	15) 0
16) 4	17) -1	18) 4	19) -1	20) 7
21) -1 ; 3	22) 25	23) $x \in \varnothing$	24) -2 ; $\frac{14}{9}$	25) ± 1

БЛОК 2. Решите уравнения методом введения новой переменной:

А

1) $\left(\sqrt{47+x}-1\right)\left(\sqrt{47+x}-2\right)=20$

2) $x^2+\sqrt{x^2+20}=22$

3) $\sqrt{2x+1}+\dfrac{4}{\sqrt{2x+1}}=4$

4) $\left(\sqrt{-5-x}+21\right)\left(\sqrt{-5-x}-3\right)=-44$

5) $x^2+11+\sqrt{x^2+11}=42$

6) $x^2+4-5\sqrt{x^2-2}=0$

7) $x+12\sqrt{x}-64=0$

8) $\dfrac{x-4}{\sqrt{x}+2}=x-8$

В

9) $\sqrt{3x^2-2x+15}+\sqrt{3x^2-2x+8}=7$

10) $x^2-5x+4\sqrt{x^2-5x+10}=2$

11) $\sqrt{3x^2-6x+7}+x^2=2x+7$

12) $\sqrt{\dfrac{2x+2}{x+2}}-\sqrt{\dfrac{x+2}{2x+2}}=\dfrac{7}{12}$

13) $x^2+2x+\sqrt{x^2+2x+8}-12=0$

14) $\sqrt{\frac{x+5}{x}}+4\sqrt{\frac{x}{x+5}}=4$

15) $x^2+3x-18+4\cdot\sqrt{x^2+3x-6}=0$

16) $x^2-4x-6=\sqrt{2x^2-8x+12}$

17) $3x^2+15x+2\left(x^2+5x+1\right)^{\frac{1}{2}}=2$

18) $\sqrt{2x^2+5x-2}-\sqrt{2x^2+5x-9}=1$

19) $3\cdot\sqrt{\frac{x}{x-1}}-2{,}5=3\cdot\sqrt{1-\frac{1}{x}}$

20) $\sqrt{x^2-3x+7}=3x+(x-3)^2-22$

21) $\frac{x}{x+3}-2\cdot\sqrt{1+\frac{3}{x}}=3$

22) $\sqrt{2x^2-4x+3}-\sqrt{x^2-2x-2}=2$

23) $\frac{\sqrt{2x+1}}{\sqrt{x-1}}-2\frac{\sqrt{x-1}}{\sqrt{2x+1}}=1$

24) $(x+4)(x+1)-3\sqrt{x^2+5x+2}=6$

25) $x^2-7x+\sqrt{x^2-7x+18}=24$

ОТВЕТЫ

1) -11 2) ± 4 3) $\frac{3}{2}$ 4) -6

5) ± 5 6) $\pm\sqrt{6}$; $\pm\sqrt{11}$ 7) 16 8) 9

9) $-\frac{1}{3}$; 1 10) 2; 3 11) -1; 3 12) 7

13) $-4;\ 2$ 14) $\frac{5}{3}$ 15) $-5;\ 2$ 16) $-2;\ 6$

17) $-5;\ 0$ 18) $-\frac{9}{2};\ 2$ 19) 1,8 20) $-3;\ 6$

21) -4 22) $-1;\ 3;\ 1\pm 2\sqrt{3}$ 23) 2,5 24) $-7;\ 2$

25) $-2;\ 9$

<u>БЛОК 3</u>. Решите уравнения методом разложения на множители:

А

1) $\sqrt{7-x^2}\cdot\sqrt{10-3x-x^2}=0$

2) $\dfrac{\sqrt{(x+5)(x-3)}}{x+5}=0$

3) $(x^2+2x-3)\sqrt{3-x^2}=0$

4) $(9-x^2)\sqrt{2-x}=0$

5) $(x^2-4)\sqrt{\dfrac{x+1}{x-6}}=0$

6) $(x+2)\sqrt{\dfrac{x+1}{x-5}}=0$

В

7) $\dfrac{\sqrt{6-x-x^2}}{2x-5}=\dfrac{\sqrt{6-x-x^2}}{x-2}$

8) $(x^2-9)\sqrt{x^2-5x+4}=2x^2-18$

9) $(x-1)\sqrt{x^2-x-6}=6x-6$

10) $(x^2-4)\left(\sqrt{3-2x}-x\right)=0$

ОТВЕТЫ

1) $-\sqrt{7};\ 2$ 2) 3 3) $1;\ \pm\sqrt{3}$ 4) $-3;\ 2$ 5) $-2;\ -1$

6) $-2;\ -1$ 7) -3 8) $-3;\ 0;\ 5$ 9) $-6;\ 7$ 10) $-2;\ 1$

БЛОК 4. **Решите иррациональные уравнения, содержащие корни высших степеней:**

A

1) $2(x+8)^{\frac{1}{2}}=9(x+8)^{\frac{1}{4}}+18$

2) $1+\frac{15}{(2x+1)^{\frac{1}{4}}}-2(2x+1)^{\frac{1}{4}}=0$

3) $2x^{\frac{1}{3}}+5x^{\frac{1}{6}}=18$

4) $\sqrt[3]{(x-3)^2}+3\cdot\sqrt[3]{x-3}+2=0$

5) $\frac{4}{\sqrt[3]{x}+2}+\frac{\sqrt[3]{x}+3}{5}=2$

6) $\sqrt[5]{25+\sqrt{x-4}}=2$

7) $x^{\frac{1}{2}}-3x^{\frac{1}{4}}-10=0$

B

8) $\sqrt[3]{5x+7}-\sqrt[3]{5x-12}=1$

9) $\sqrt[3]{\frac{6+x}{x}}-\sqrt[3]{\frac{6-6x}{x}}=1$

10) $\sqrt[3]{x+6}+\sqrt[3]{66-x}=6$

11) $\sqrt[3]{x-2}+\sqrt{x+1}=3$

12) $\sqrt{x+2}-\sqrt[3]{3x+2}=0$

13) $\sqrt[3]{x+1}+\sqrt[3]{6-x}=1$

14) $\sqrt[3]{\frac{4x}{2x-3}}+6\cdot\sqrt[3]{\frac{2x-3}{4x}}=5$

15) $x\sqrt{x\sqrt{x}}+x\sqrt{x^{1,5}}=\sqrt{512}$

16) $5x^2\cdot\sqrt[3]{x\sqrt{x}}-4\sqrt{x^5}=243$

17) $\sqrt[4]{1-x}+\sqrt[4]{15+x}=2$

18) $\sqrt[4]{77-x}+\sqrt[4]{20+x}=5$

19) $\sqrt[3]{x^2-1}+\sqrt[3]{x^2+18}=5$

20) $\sqrt[3]{\frac{x+3}{5x+2}}+\sqrt[3]{\frac{5x+2}{x+3}}=\frac{13}{6}$, найдите наибольший корень

21) $\sqrt{x\cdot\sqrt[4]{x\cdot\sqrt[3]{x}}}=4$

22) $\sqrt[3]{x+5}+\sqrt[3]{x+6}=\sqrt[3]{2x+11}$

23) $\sqrt[3]{x+1}+\sqrt[3]{3x+1}=\sqrt[3]{x-1}$

24) $\sqrt[3]{x+24}+\sqrt{12-x}=6$

25) $\sqrt[3]{1+\sqrt{x}}+\sqrt[3]{1-\sqrt{x}}=2$

ОТВЕТЫ

1) 1 288	2) 40	3) 64	4) $-5;\ 2$
5) 8; 27	6) 53	7) 625	8) $-3;\ 4$
9) $-3;\ \frac{6}{7}$	10) 2; 58	11) 3	12) 2
13) $-2;\ 7$	14) $\frac{81}{50};\ 2$	15) 4	16) 9
17) $-15;\ 1$	18) $-4;\ 61$	19) ± 3	20) 5
21) 8	22) $-6;\ -\frac{11}{2};\ -5$	23) -1	24) $-88;\ -24;\ 3$
25) 0			

<u>БЛОК 5</u>. Решите, используя анализ уравнений:

А

1) $\sqrt{5x+2}+\sqrt{3x-2}=-1$

2) $\sqrt{x-1}+\sqrt{2x+5}=4$

3) $\sqrt{x-5}-\sqrt{x+4}=2$

4) $6-\sqrt{x+\sqrt{2}}=7$

5) $\sqrt{x+4}+\sqrt{x-4}=\sqrt{21-x}$

6) $\sqrt{x-4}+3x=\sqrt{12-3x}$

7) $\sqrt{x}+\sqrt{x-1}=1$

8) $\sqrt{8-x}-\sqrt{17+x}=1$

9) $\sqrt{3+\sqrt{x-1}}=1$

10) $\sqrt{x+3}+\sqrt{x}=5-2x$

ОТВЕТЫ

1) $x\in\varnothing$	2) 2	3) $x\in\varnothing$	4) $x\in\varnothing$	5) 5
6) $x\in\varnothing$	7) 1	8) -8	9) $x\in\varnothing$	10) 1

БЛОК 6. Решите иррациональные уравнения:

С

1) $\sqrt{4+\sqrt{x^2+2x+1}}-x=9$

2) $\sqrt{4+\sqrt{x^2-6x+9}}=x+5$

3) $\sqrt{\frac{20+x}{x}}+\sqrt{\frac{20-x}{x}}=\sqrt{6}$

4) $\sqrt{x+8+2\sqrt{x+7}}+\sqrt{x+1-\sqrt{x+7}}=4$

5) $(x+4)(x+1)-3\sqrt{x^2+5x+2}=6$

6) $\sqrt{x^2+x+4}+\sqrt{x^2+x+1}=\sqrt{2x^2+2x+9}$

7) $\sqrt{x^2-6|x|+17}=3$

8) $\sqrt{x^2+x-2}+\sqrt{x^2-4x+3}=\sqrt{2x^2-3x+1}$

9) $\sqrt{x+\sqrt{x+11}}+\sqrt{x-\sqrt{x+11}}=4$

10) $\sqrt{x+2-4\sqrt{x-2}}-\sqrt{x-1-2\sqrt{x-2}}=1$

11) $\sqrt{4-x+4\sqrt{-x}}=4-\sqrt{4-x-4\sqrt{-x}}$

12) $\frac{\sqrt{x+2}-\sqrt{x-2}}{\sqrt{x+2}+\sqrt{x-2}}=\frac{x}{2}$

13) $\sqrt{5+\sqrt[3]{x}}+\sqrt{5-\sqrt[3]{x}}=\sqrt[3]{x}$

14) $\sqrt{x^2-3x+1}=|2x-1|-x$

15) $\sqrt{3-x}=|x|-3$

16) $\dfrac{1}{1-\sqrt{1-x}}+\dfrac{1}{1+\sqrt{1-x}}=3$

17) $\sqrt{\dfrac{x^2+5x+13}{x^2-1}}-\sqrt{\dfrac{x^2-1}{x^2+5x+13}}=\dfrac{8}{3}$

18) $\dfrac{3\sqrt{x+2}-5}{3\sqrt{x+2}-4}=\dfrac{4\sqrt{x+2}-9}{4\sqrt{x+2}-8}$

19) $\sqrt{6-x-x^2}-\sqrt{x^2+x-1}=1$

20) $\dfrac{\sqrt[3]{7-x}-\sqrt[3]{x-5}}{\sqrt[3]{7-x}+\sqrt[3]{x-5}}=6-x$

21) $\sqrt{7x^2+8x+10}-\sqrt{7x^2-8x+10}=2x$

22) $\sqrt{10x^2+8x+7}+\sqrt{10x^2-8x+7}=8x$

23) $(\sin 2x)\cdot\sqrt{4-x^2}=0$

24) $(\cos 3x-1)\cdot\sqrt{6+5x-x^2}=0$

ОТВЕТЫ

1) -6	2) -2	3) 12	4) 2
5) -7; 2	6) -1; 0	7) ± 2; ± 4	8) -2; 1; 3
9) 5	10) $[2;3]$	11) $[-4;0]$	12) 2
13) 64	14) 0	15) -6; 3	16) $\dfrac{2}{3}$
17) $-\dfrac{11}{8}$; 2	18) 14	19) -2; 1	20) 5; 6; 7
21) 0; ± 1	22) 1	23) 0; ± 2; $\pm\dfrac{\pi}{2}$	

24) -1; 0; 6; $\dfrac{2\pi}{3}$; $\dfrac{4\pi}{3}$

§ 3. РЕШЕНИЕ СИСТЕМ ИРРАЦИОНАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ

БЛОК 1. **Решите системы иррациональных уравнений методом подстановки:**

А

1) $\begin{cases} \sqrt{x^2+4y^2}=y+3 \\ x+y=5 \end{cases}$

2) $\begin{cases} \sqrt{x^2+4xy-3y^2}=x+1 \\ x-y=1 \end{cases}$

3) $\begin{cases} 10\sqrt{xy}+3x-3y=58 \\ x-y=6 \end{cases}$

В

4) $\begin{cases} \sqrt[3]{x}-\sqrt[3]{y}=2 \\ xy=27 \end{cases}$

5) $\begin{cases} \sqrt[3]{x}+\sqrt[3]{y}=3 \\ xy=8 \end{cases}$

6) $\begin{cases} x^3-\sqrt{y}=1 \\ 5x^6+2y-8x^3\cdot\sqrt{y}=2 \end{cases}$

7) $\begin{cases} \dfrac{1}{\sqrt{x}}-\dfrac{1}{\sqrt{y}}=\dfrac{1}{6} \\ xy=36 \end{cases}$

8) $\begin{cases} 2\sqrt{x}-\sqrt{y}=5 \\ \sqrt{x}\cdot\sqrt{y}=3 \end{cases}$

9) $\begin{cases} \sqrt{x-2y+2}=2 \\ \sqrt{y-2x+11}=x-5 \end{cases}$

10) $\begin{cases} \sqrt{x+3y+1}=2 \\ \sqrt{2x-y+2}=7y-6 \end{cases}$

11) $\begin{cases} \sqrt{x+y-1}=\sin 90^\circ \\ \sqrt{x-y+2}=y+2 \end{cases}$

ОТВЕТЫ

1) $(3;2)$ 2) $(2;1)$ 3) $(8;\ 2)$; $(-2;-8)$

4) $(27;1)$; $(-1;-27)$ 5) $(1;8)$; $(8;1)$ 6) $(\sqrt[3]{4};9)$

7) $(4;9)$ 8) $(9;1)$ 9) $(6;2)$

10) $(0;1)$ 11) $(2;0)$

БЛОК 2. **Решите системы иррациональных уравнений методом алгебраических действий:**

А

1) $\begin{cases} 2\sqrt{x}+\sqrt{y}=9 \\ 5\sqrt{x}-4\sqrt{y}=3 \end{cases}$

2) $\begin{cases} \sqrt{x+3y+5}=2 \\ \sqrt{2x-y+3}=7y+1 \end{cases}$

3) $\begin{cases} \sqrt{x-y+2}=3 \\ \sqrt{x+y-4}=13-2x \end{cases}$

4) $\begin{cases} \sqrt{\dfrac{y-2}{x+3}}=1 \\ xy=36 \end{cases}$

5) $\begin{cases} \sqrt{x}+2\sqrt{y}=9 \\ x-4y=9 \end{cases}$

6) $\begin{cases} \sqrt{x+y}=7 \\ \sqrt{x-y}=3 \end{cases}$

7) $\begin{cases} \sqrt{x+y-1}=1 \\ \sqrt{x-y+2}=2y-2 \end{cases}$

8) $\begin{cases} 3\sqrt{x}-\sqrt{y}=8 \\ \sqrt{x}+2\sqrt{y}=19 \end{cases}$

9) $\begin{cases} x-y=16 \\ \sqrt{x}-\sqrt{y}=2 \end{cases}$

10) $\begin{cases} x\sqrt{y}+y\sqrt{x}=30 \\ \sqrt{x}+\sqrt{y}=5 \end{cases}$

11) $\begin{cases} \sqrt{x}+\sqrt{y}=5 \\ 2x+y+2\sqrt{xy}=34 \end{cases}$

В

12) $\begin{cases} \sqrt{xy-2y}=4 \\ \sqrt{\dfrac{y}{x-2}}=1 \end{cases}$

13) $\begin{cases} 9x+y+6\sqrt{xy}=100 \\ \sqrt{y}-\sqrt{x}=2 \end{cases}$

14) $\begin{cases} x+25y+10\sqrt{xy}=100 \\ \sqrt{x}-\sqrt{y}=4 \end{cases}$

15) $\begin{cases} \sqrt{x}-\sqrt{y}=2\sqrt{xy} \\ x+y=12 \end{cases}$

16) $\begin{cases} x^2+y\sqrt{xy}=70 \\ x\sqrt{xy}+y^2=105 \end{cases}$

17) $\begin{cases} 5\cdot\sqrt[3]{x-2y}+3\cdot\sqrt[3]{x+y}=13 \\ 3\cdot\sqrt[3]{x-2y}-4\cdot\sqrt[3]{x+y}=2 \end{cases}$

18) $\begin{cases} \sqrt{\dfrac{108x}{5y}} = \sqrt{x+y} + \sqrt{x-y} \\ \sqrt{\dfrac{20y}{3x}} = \sqrt{x+y} - \sqrt{x-y} \end{cases}$

19) $\begin{cases} \sqrt{\dfrac{16x}{5y}} = \sqrt{x+y} - \sqrt{x-y} \\ \sqrt{\dfrac{20y}{x}} = \sqrt{x+y} + \sqrt{x-y} \end{cases}$

20) $\begin{cases} x\sqrt{x} + 3y\sqrt{x} = 36 \\ y\sqrt{y} + 3x\sqrt{y} = 28 \end{cases}$

21) $\begin{cases} x^2 + x\cdot\sqrt[3]{xy^2} = 80 \\ y^2 + y\cdot\sqrt[3]{yx^2} = 5 \end{cases}$

22) $\begin{cases} \sqrt[3]{x} + \sqrt[3]{y} = 5 \\ \sqrt[6]{x} - \sqrt[6]{y} = 1 \end{cases}$

23) $\begin{cases} \sqrt{x} + \sqrt{y} = 10 \\ \sqrt[4]{x} + \sqrt[4]{y} = 4 \end{cases}$

24) $\begin{cases} x = 6\sqrt{x+y} \\ y = 2\sqrt{x+y} \end{cases}$

ОТВЕТЫ

1) $(9;9)$

2) $(-1;0)$

3) $(6;-1)$

4) $(-9;-4)$; $(4;9)$

5) $(25;4)$

6) $(29;20)$

7) $\left(\frac{1}{2};\frac{3}{2}\right)$

8) $(25;49)$

9) $(25;9)$

10) $(4;9)$; $(9;4)$

11) $(9;4)$

12) $(6;4)$; $(-2;-4)$

13) $(4;16)$

14) $(25;1)$

15) $\left(6+\frac{3\sqrt{15}}{2};\ 6-\frac{3\sqrt{15}}{2}\right)$

16) $(4;9)$

17) $\left(\frac{10}{3};-\frac{7}{3}\right)$

18) $(10;6)$

19) $(5;4)$

20) $(9;1)$

21) $(8;1)$; $(8;-1)$; $(-8;1)$; $(-8;-1)$

22) $(64;1)$

23) $(1;81)$; $(81;1)$

24) $(0;0)$; $(48;16)$

БЛОК 3. **Решите системы иррациональных уравнений методом введения новых переменных:**

A

1) $\begin{cases} \dfrac{8}{\sqrt{x-3}} - \dfrac{3}{\sqrt{y+3}} = 1 \\ \dfrac{4}{\sqrt{x-3}} + \dfrac{9}{\sqrt{y+3}} = 4 \end{cases}$

2) $\begin{cases} \sqrt{x+y} + \sqrt{x-v} = 10 \\ \sqrt{x^2 - v^2} = 9 \end{cases}$

3) $\begin{cases} x - \sqrt{xy} + y = 7 \\ \sqrt{x} + \sqrt{y} = 5 \end{cases}$

4) $\begin{cases} \sqrt{\dfrac{x+y}{2}} + \sqrt{\dfrac{x-y}{3}} = 14 \\ \sqrt{\dfrac{x+y}{8}} - \sqrt{\dfrac{x-y}{12}} = 3 \end{cases}$

5) $\begin{cases} \sqrt{2x-y+11} - \sqrt{3x+y-9} = 3 \\ \sqrt[4]{2x-y+11} + \sqrt[4]{3x+y-9} = 3 \end{cases}$

6) $\begin{cases} x+y+\sqrt{x+y} = 20 \\ x^2 + y^2 = 136 \end{cases}$

7) $\begin{cases} \sqrt{x} + \sqrt{y} = 5 \\ x + y = 13 \end{cases}$

8) $\begin{cases} \sqrt{x^2 - y^2} + \sqrt{x-y} = 6 \\ x^2 - y^2 - x + y = 12 \end{cases}$

9) $\begin{cases} \dfrac{1}{\sqrt{x}} + \dfrac{1}{\sqrt{y}} = 1 \\ \sqrt{x} + \sqrt{y} = 4 \end{cases}$

10) $\begin{cases} \dfrac{1}{\sqrt[3]{x}} - \dfrac{1}{\sqrt[3]{y}} = \dfrac{1}{6} \\ \sqrt[3]{xy} = 6 \end{cases}$

11) $\begin{cases} \dfrac{1}{\sqrt{x}} + \dfrac{1}{y} = \dfrac{5}{2} \\ \dfrac{1}{x} - \dfrac{1}{y^2} = \dfrac{15}{4} \end{cases}$

B

12) $\begin{cases} \sqrt{2-x} + \sqrt{5-y} = 3 \\ xy - 5x - 2y + 10 = 4 \end{cases}$

13) $\begin{cases} \sqrt{5x+2y+5} - \sqrt{x+y} = 3 \\ 6x + 3y = 12 \end{cases}$

14) $\begin{cases}\sqrt{\dfrac{2x-1}{y+2}}+\sqrt{\dfrac{y+2}{2x-1}}=2\\ x+y=12\end{cases}$

15) $\begin{cases}\sqrt{\dfrac{x}{y}}-\sqrt{\dfrac{y}{x}}=\dfrac{3}{2}\\ x+y+xy=9\end{cases}$

16) $\begin{cases}x^2+y^2+xy=12\\ x+y+\sqrt{xy}=6\end{cases}$

17) $\begin{cases}\sqrt{\dfrac{x}{y}}-\sqrt{\dfrac{y}{x}}=\dfrac{5}{6}\\ x-y=5\end{cases}$

18) $\begin{cases}\sqrt[4]{y+x}-\sqrt[4]{x-y}=2\\ \sqrt{y+x}+\sqrt{x-y}=8\end{cases}$

19) $\begin{cases}2\sqrt{y+2x}-\sqrt{y-x}=2x\\ \sqrt{y+2x}+\sqrt{y-x}=y\end{cases}$

20) $\begin{cases}\sqrt{y+x}+\sqrt{2y-x}=y\\ 2\sqrt{y+x}-\sqrt{2y-x}=x\end{cases}$

21) $\begin{cases}\sqrt{\dfrac{x+y}{x-y}}+3\sqrt{\dfrac{x-y}{x+y}}=4\\ x^2-y^2=16\end{cases}$

22) $\begin{cases}xy-x-y=0\\ \sqrt{\dfrac{6x}{x+y}}+\sqrt{\dfrac{x+y}{6x}}=2,5\end{cases}$

23) $\begin{cases}\sqrt{x+y}+\sqrt{2x+y+3}=7\\ 3x+2y=22\end{cases}$

24) $\begin{cases}\sqrt{2x-1}+\sqrt{y+3}=3\\ 2xy-y+6x-3=4\end{cases}$

25) $\begin{cases}\sqrt[3]{x+y+4}+\sqrt[3]{y+7}=4\\ x+2y=5\end{cases}$

26) $\begin{cases}x+y-2\sqrt{xy}-\sqrt{x}+\sqrt{y}=2\\ \sqrt{x}+\sqrt{y}=8\end{cases}$

27) $\begin{cases}x+y+2\sqrt{xy}+\sqrt{x}+\sqrt{y}=12\\ \sqrt{x}-\sqrt{y}=1\end{cases}$

28) $\begin{cases}2\left(\sqrt{x}+\sqrt{y}\right)=3\sqrt{xy}\\ x+y=5\end{cases}$

29) $\begin{cases}\sqrt{x+y}+\sqrt{x^2+xy}=3\\ x+y+x^2+xy=5\end{cases}$

30) $\begin{cases}\sqrt{x+y}+\sqrt{x+2y}=10\\ \sqrt{x+y}+2x+y=16\end{cases}$

ОТВЕТЫ

1) $(19;6)$

2) $(41;40)$; $(41;-40)$

3) $(4;9)$; $(9;4)$

4) $(124;76)$

5) $(3;1)$

6) $(6;10)$; $(10;6)$

7) $(4;9)$; $(9;4)$

8) $(4;0)$

9) $(4;4)$

10) $(8;27)$; $(-27;-8)$

11) $\left(\frac{1}{4};2\right)$

12) $(1;1)$; $(-2;4)$

13) $(3;-2)$

14) $(5;7)$

15) $(4;1)$; $\left(-9;-\frac{9}{4}\right)$

16) $(2;2)$

17) $(9;4)$

18) $(28;16\sqrt{3})$

19) $(0;0)$; $(3;3)$; $\left(-\frac{3}{4};\frac{3}{2}\right)$; $\left(\frac{9}{4};\frac{9}{2}\right)$

20) $(0;0)$; $(6;3)$; $(-3;3)$; $(3;6)$

21) $(-4;0)$; $(4;0)$; $\left(-6\frac{2}{3};-5\frac{1}{3}\right)$; $\left(6\frac{2}{3};5\frac{1}{3}\right)$

22) $\left(\frac{24}{23};24\right)$; $\left(3;\frac{3}{2}\right)$

23) $(-10;26)$; $(4;5)$

24) $(1;1)$; $\left(\frac{5}{2};-2\right)$

25) $(3;1)$

26) $(25;9)$; $\left(12\frac{1}{4};20\frac{1}{4}\right)$

27) $(4;1)$

28) $(4;1)$; $(1;4)$

29) $(4;-3)$; $\left(\frac{1}{4};3\frac{3}{4}\right)$

30) $(-4;20)$

БЛОК 4. Решите системы иррациональных уравнений:

С

1) $\begin{cases} \sqrt{7x+y}+\sqrt{x+y}=6 \\ \sqrt{x+y}-y+x=2 \end{cases}$

2) $\begin{cases} \sqrt{7x+y}+\sqrt{2x+y}=5 \\ \sqrt{2x+y}+x-y=1 \end{cases}$

3) $\begin{cases} \sqrt{4-3x}-1=\sqrt{5y-3x} \\ \sqrt{1-5y}+\sqrt{5y-3x}=5 \end{cases}$

4) $\begin{cases} x^2+x\sqrt{xy}-3=0 \\ y^2+y\sqrt{xy}-24=0 \end{cases}$

5) $\begin{cases} 3y+2\sqrt{xy}+8=0 \\ x-3\sqrt{xy}+7=0 \end{cases}$

6) $\begin{cases} x+\sqrt{x}=12-\sqrt{xy} \\ y+\sqrt{y}=18-\sqrt{xy} \end{cases}$

7) $\begin{cases} \sqrt{x}+\sqrt{y}=\dfrac{3}{4}\sqrt{xy} \\ x+y=20 \end{cases}$

8) $\begin{cases} \sqrt[3]{x+2y}+\sqrt[3]{x-y+2}=3 \\ 2x+y=7 \end{cases}$

9) $\begin{cases} y^2+\sqrt{3y^2-2x+3}=\dfrac{2}{3}x+5 \\ 3x-2y=5 \end{cases}$

10) $\begin{cases} 9x^2+\sqrt{9x^2+2y+1}=1-2y \\ 6x+y=2 \end{cases}$

11) $\begin{cases} |y|\cdot\sqrt{y^2-4x^2}=0 \\ x+y-\sqrt{y^2-4x^2}=5 \end{cases}$

12) $\begin{cases} |x|\cdot\sqrt{4x^2-y^2}=0 \\ x-y+\sqrt{4x^2-y^2}=1 \end{cases}$

13) $\begin{cases} x+y-\sqrt{x}-\sqrt{y}+2\sqrt{xy}=12 \\ \sqrt{x}-\sqrt{y}=2 \end{cases}$

14) $\begin{cases} x\sqrt{x}+y\sqrt{y}=189 \\ x\sqrt{y}+y\sqrt{x}=180 \end{cases}$

15) $\begin{cases} y=\sqrt{2-x} \\ y+\sqrt{(x-3)^2}=3 \end{cases}$

16) $\begin{cases} y(x-2)=6 \\ y+\sqrt{(x-3)^2}=0 \end{cases}$

17) $\begin{cases} \sqrt{x^2-2x}=y-1 \\ y+2|x|=1 \end{cases}$

18) $\begin{cases} 1+y+\sqrt{x}=0 \\ y+\sqrt{x+23}=0 \end{cases}$

ОТВЕТЫ

1) $(2;2)$ **2)** $(1;2)$ **3)** $\left(-4;-\frac{3}{5}\right)$

4) $(1;4)$ **5)** $(-1;-4)$ **6)** $(4;9)$

7) $(4;16)$; $(16;4)$ **8)** $(2;3)$; $\left(\frac{13}{3};-\frac{5}{3}\right)$ **9)** $(3;2)$; $\left(\frac{17}{27};-1\frac{5}{9}\right)$

10) $\left(\frac{2}{3};-2\right)$ **11)** $(-5;10)$; $\left(\frac{5}{3};\frac{10}{3}\right)$ **12)** $(-1;-2)$; $\left(\frac{1}{3};-\frac{2}{3}\right)$

13) $(9;1)$ **14)** $(16;25)$; $(25;16)$ **15)** $(1;1)$

16) $(0;-3)$ **17)** $(0;1)$ **18)** $(121;-12)$

§ 4. РЕШЕНИЕ ИРРАЦИОНАЛЬНЫХ НЕРАВЕНСТВ

БЛОК 1. Решите иррациональные неравенства возведением в степень обеих частей неравенства:

А

1) $\sqrt{6-x-x^2}<\sqrt{3x+6}$

2) $\sqrt{6-x^2}>\sqrt{-x}$

3) $\sqrt{1-\frac{x+2}{x^2}}<\frac{2}{3}$

4) $\sqrt{-x^2-3x+4}>-2$

5) $\sqrt{\frac{x-2}{1-2x}}>-1$

6) $\sqrt{\frac{x^2-x}{x+3}}<1$

7) $\sqrt[3]{x^3+4x^2-36}<x$

8) $\sqrt[5]{x^2-4x}>\sqrt[5]{3-2x}$

9) $\sqrt{\frac{x+4}{x-2}}>6$

10) $\sqrt[3]{x^2-4x}>\sqrt[3]{3-2x}$

11) $\sqrt{3x-10}>\sqrt{6-x}$

12) $\sqrt{1-x}\leq\sqrt[4]{5+x}$

13) $\sqrt{(x-3)(2-x)}<\sqrt{4x^2+12x+11}$

14) $\sqrt{\frac{2x^2+7x-4}{x+4}}<\frac{1}{2}$

15) $\sqrt{2x^2-3x-5}<\sqrt{x-1}$

16) $\sqrt{\frac{x+4}{2x-1}}\geq\sqrt{5x-8}$

В

17) $x+4>2\sqrt{4-x^2}$

18) $1-\sqrt{13+3x^2}>2x$

19) $\sqrt{\frac{1}{x^2}-\frac{3}{4}}<\frac{1}{x}-\frac{1}{2}$

20) $\sqrt{5-x^2}>x-1$

21) $6-\sqrt{8+2x-x^2}<3x$

22) $\sqrt{\frac{x^3+8}{x}}>x-2$

23) $\sqrt{2x^2-3x-5}<x-1$

24) $\sqrt{x+1}>x-1$

25) $\sqrt{x^2-3x+2}>x+3$

26) $\sqrt{(x+2)(x-5)}<8-x$

27) $\sqrt{24+2x-x^2}<x$

28) $3\sqrt{-x^2+x+6}>-2(2x-1)$

29) $\sqrt{x^2-4x}>x-3$

30) $\sqrt{5-2x}<6x-1$

31) $\sqrt{2x-x^2}<5-x$

32) $1-\sqrt{\dfrac{1-x}{7-4x}}\le x$

33) $\sqrt{x^3+x^2-2x}+1\le x$

34) $x-9<3\sqrt{x+1}$

Решите иррациональные неравенства, содержащие несколько радикалов:

B

35) $3\sqrt{x}-\sqrt{x+3}>1$

36) $\sqrt{x+2}+\sqrt{3-x}>-1$

37) $\sqrt{3-x}+\sqrt{x+1}>\dfrac{1}{2}$

38) $\sqrt{x-5}+\sqrt{10-x}<3$

39) $\sqrt{2x+5}+\sqrt{x-1}>8$

40) $\sqrt{x+2}-\sqrt{x-1}>1$

ОТВЕТЫ

1) $(0;2]$

2) $(-2;0]$

3) $(-1{,}2;-1]\cup[2;3)$

4) $[-4;1]$

5) $\left(\dfrac{1}{2};2\right]$

6) $(-1;0]\cup[1;3)$

7) $(-3;3)$

8) $(-\infty;-1)\cup(3;\infty)$

9) $\left(2;\dfrac{76}{35}\right)$

10) $(-\infty;-1)\cup(3;\infty)$

11) $(4;6]$

12) $[-1;1]$

13) $[2;3]$ 14) $\left[\frac{1}{2};\frac{5}{8}\right)$ 15) $\left[\frac{5}{2};1+\sqrt{3}\right)$

16) $\left[\frac{8}{5};2\right]$ 17) $\left[-2;-\frac{8}{5}\right)\cup(0;2]$ 18) $(-\infty;-2)$

19) $\left(1;\frac{2}{\sqrt{3}}\right]$ 20) $\left[-\sqrt{5};2\right)$ 21) $(1;4]$

22) $(-\infty;-2]\cup(0;\infty)$ 23) $\left[\frac{5}{2};3\right)$ 24) $[-1;3)$

25) $\left(-\infty;-\frac{7}{9}\right)$ 26) $(-\infty;-2]\cup\left[5;\frac{74}{13}\right)$ 27) $(4;6]$

28) $(-1;3]$ 29) $(-\infty;0]\cup\left(\frac{9}{2};\infty\right)$ 30) $\left(\frac{1}{2};\frac{5}{2}\right]$

31) $[0;2]$ 32) $\left[\frac{3}{4};1\right]\cup\left(\frac{7}{4};\infty\right)$ 33) $x=1$

34) $[-1;24)$ 35) $(1;\infty)$ 36) $[-2;3]$

37) $[-1;3]$ 38) $[5;6)\cup(9;10]$ 39) $(10;\infty)$

40) $[1;2)$

Б ЮК 2. Решите иррациональные неравенства методом введения новой переменной:

А

1) $\frac{2-\sqrt{x+2}}{1-\sqrt{x+2}}\le 0$

2) $\sqrt{x}-3\le\frac{2}{\sqrt{x}-2}$

3) $x^2+\sqrt{x^2+11}-31<0$

4) $2\sqrt{x}+\frac{1}{\sqrt{x}}<3$

5) $\dfrac{x-\sqrt{x}-2}{x-\sqrt{x}-6}>0$

6) $3\cdot\sqrt[6]{x+1}-\sqrt[3]{x+1}\geq 2$

7) $\dfrac{\sqrt{x+3}-1}{5-\sqrt{x+3}}\geq 0$

8) $\sqrt{1-x}+\dfrac{1}{\sqrt{1-x}}>2$

9) $x-5\sqrt{x}\leq 6$

10) $\dfrac{\sqrt[3]{1-x}-2}{\sqrt[3]{1-x}+3}\geq 0$

В

11) $\dfrac{2x+1}{x}-2\sqrt{\dfrac{2x+1}{x}}\geq 3$

12) $x^2-3\sqrt{x^2-4x+20}\geq 4x-10$

13) $(x+5)(x-2)+3\sqrt{x(x+3)}>0$

14) $x^2+5x+4<5\sqrt{x^2+5x+28}$

15) $\sqrt{x^2-3x+5}+x^2-3x-7\leq 0$

16) $\sqrt{x^2-x+1}+x^2-x-1>0$

17) $\dfrac{x}{2-x}-\dfrac{3}{4}\sqrt{\dfrac{x}{2-x}}\leq\dfrac{1}{4}$

18) $\dfrac{1}{1-\sqrt{x}}\leq\dfrac{1}{2\sqrt{x}+1}$

19) $\sqrt{x^2-x}<\dfrac{6}{\sqrt{x^2-x}}$

20) $\sqrt{x^2-x+6}+\dfrac{6}{\sqrt{x^2-x+6}}>7$

ОТВЕТЫ

1) $(-1;2]$

2) $[0;1]\cup(4;16]$

3) $(-5;5)$

4) $\left(\dfrac{1}{4};1\right)$

5) $[0;4)\cup(9;\infty)$

6) $[0;63]$

7) $[-2;22)$

8) $(-\infty;0)\cup(0;1)$

9) $[0;36]$

10) $(-\infty;-7]\cup(28;\infty)$

11) $\left(0;\dfrac{1}{7}\right]$

12) $(-\infty;-1]\cup[5;\infty)$

13) $(-\infty;-4)\cup(1;\infty)$

14) $(-9;4)$

15) $[-1;4]$

16) $(-\infty;0)\cup(1;\infty)$

17) $[0;1]$

18) $\{0\}\cup(1;\infty)$

19) $(-2;0)\cup(1;3)$ 20) $(-\infty;-5)\cup(6;\infty)$

БЛОК 3. **Решите иррациональные неравенства разложением на множители:**

А

1) $(x^2-4)\sqrt{25-x^2}\geq 0$

2) $\dfrac{\sqrt{17-15x-2x^2}}{x+3}>0$

3) $\dfrac{6-2x}{\sqrt{x^2+7x+12}}<0$

4) $(x^2-4)\sqrt{\dfrac{x+1}{x-1}}\leq 0$

5) $(x+2)^2(x-1)^2\sqrt{x-7}\geq 0$

6) $\dfrac{(x-2)(x-4)}{\sqrt{x^2+x+1}}<0$

7) $\dfrac{x-1}{x\sqrt{4+3x-x^2}}>0$

В

8) $\sqrt[3]{x^2+7x-8}\cdot\sqrt{x+9}\leq 0$

9) $\sqrt[3]{x-1}\cdot\sqrt{x}\geq 0$

10) $(x-3)\sqrt{x^2+x-2}\geq 0$

11) $(x-3)\sqrt{x^2+4}\leq x^2-9$

12) $\dfrac{\log_{0,1}(x+2)}{\sqrt{5-4x-x^2}}\leq 0$

13) $(x-1)\sqrt{-x^2+x+6}\geq 0$

14) $(x+1)\cdot\sqrt{x+4}\cdot\sqrt{x+7}\leq 0$

15) $\dfrac{\sqrt[3]{x-1}}{\sqrt{-x+5}}>0$

16) $\dfrac{\sqrt[3]{x-4}}{\sqrt[4]{x^2-5x-14}}\geq 0$

17) $(2+x)\sqrt{(4-x)(5-x)}\geq 0$

18) $(2+x)\cdot\sqrt{4-x}\cdot\sqrt{5-x}\geq 0$

19) $(x+1)\sqrt{x^2+1}>x^2-1$

20) $(x^2-3x+1)\sqrt{2x-x^2-1}\leq 0$

ОТВЕТЫ

1) $[-5;-2]\cup[2;5]$ 2) $(-3;1)$ 3) $(3;\infty)$

4) $[-2;-1]\cup(1;2]$ 5) $[7;\infty)$ 6) $(2;4)$

7) $(-1;0)\cup(1;4)$ 8) $\{-9\}\cup[-8;1]$ 9) $\{0\}\cup[1;\infty)$

10) $\{-2;1\}\cup[3;\infty)$ 11) $\left(-\infty;-\frac{5}{6}\right]\cup[3;\infty)$ 12) $[-1;1)$

13) $\{-2\}\cup[1;3]$ 14) $[-4;-1]$ 15) $(1;5)$

16) $(7;\infty)$ 17) $[-2;4]\cup[5;\infty)$ 18) $[-2;4]$

19) $(-1;\infty)$ 20) $x=1$

БЛОК 4. Решите иррациональные неравенства методом интервалов:

В

1) $\sqrt{x^2-x-12}\ge x$

2) $\sqrt{x+2}+\sqrt{3-x}\le 3$

3) $\sqrt{x^2-1}>x$

4) $\dfrac{x-2\sqrt{x}-8}{2^x-4}\ge 0$

5) $\sqrt{2x^2-3x-5}<x-1$

6) $\dfrac{\sqrt{x}}{2-x}\le 1$

7) $\dfrac{1}{\sqrt{x}-1}<1$

8) $3\sqrt{x}-\sqrt{x+3}>1$

9) $\dfrac{2}{2-\sqrt{x+3}}\le 1$

10) $\dfrac{10x^2-7x+1}{\sqrt{x-3}-\sqrt{5-x}}<0$

11) $(2x-1)\left(x-\sqrt{3-2x}\right)\le 0$

12) $\dfrac{1-\sqrt{1-4x^2}}{x}<3$

13) $\sqrt{x+2} > x$

14) $\sqrt{\dfrac{3x-1}{2-x}} > 1$

15) $\dfrac{\sqrt{x-2}}{2x-5} < 1$

16) $\sqrt{2-x} - x > 0$

ОТВЕТЫ

1) $(-\infty; -3]$

2) $[-2; -1] \cup [2; 3]$

3) $(-\infty; -1]$

4) $[0; 2) \cup [16; \infty)$

5) $\left[\dfrac{5}{2}; 3\right)$

6) $[0; 1] \cup (2; \infty)$

7) $[0; 1) \cup (4; \infty)$

8) $(1; \infty)$

9) $\{-3\} \cup (1; \infty)$

10) $[3; 4)$

11) $\left[\dfrac{1}{2}; 1\right]$

12) $\left[-\dfrac{1}{2}; 0\right) \cup \left(0; \dfrac{1}{2}\right]$

13) $[-2; 2)$

14) $\left(\dfrac{3}{4}; 2\right)$

15) $\left[2; \dfrac{5}{2}\right) \cup (3; \infty)$

16) $(-\infty; 1)$

Б ЛОК 5. Решите иррациональные неравенства:

С

1) $\dfrac{\sqrt{4+3x-x^2}}{2x+3} \geq \dfrac{\sqrt{4+3x-x^2}}{x+3}$

2) $\sqrt{4-x^2} + \dfrac{|x|}{x} \geq 0$

3) $\dfrac{\sqrt{12-x-x^2}}{2x-7} \leq \dfrac{\sqrt{12-x-x^2}}{x-5}$

4) $\sqrt{\dfrac{2x-1}{x+2}} - \sqrt{\dfrac{x+2}{2x-1}} \geq \dfrac{7}{12}$

5) $\dfrac{4x}{1+x^2} < 1 + \sqrt{\dfrac{2x}{1+x^2}}$

6) $\dfrac{6x}{x-2} - \sqrt{\dfrac{12x}{x-2}} - 2 \cdot \sqrt[4]{\dfrac{12x}{x-2}} > 0$

7) $\sqrt{3x^2+5x+7} - \sqrt{3x^2+5x+2} > 1$

8) $\sqrt{x^2+x+10} - \sqrt{x^2+x+3} \geq 1$

9) $|x| \le \sqrt{x^2-2}+1$

10) $-9\cdot\sqrt[4]{x}+\sqrt{x}+18 \ge 0$

11) $(x^2-4x+3)\sqrt{x+1} \le x^2-2x-3$

12) $\dfrac{1-\sqrt{21-4x-x^2}}{x+1} \ge 0$

13) $\dfrac{1}{\sqrt{x+18}} > \dfrac{1}{2-x}$

14) $\dfrac{1}{\sqrt{2-x}} \ge \dfrac{1}{1+x}$

15) $\sqrt{|x|-179} \ge \sqrt{|x|-197}$

16) $\sqrt{(x-7)^2-6|x-7|+8} < \sqrt{3}$

17) $\sqrt{x^4-2x^2+1} > 1-x$

18) $\dfrac{(x-2)\sqrt{x^2-5x+4}}{5-x} \ge 0$

Решите системы иррациональных неравенств:

19) $\begin{cases}\sqrt{4x-7} < x\\ \sqrt{x+5}+\sqrt{5-x} > 4\end{cases}$

20) $\begin{cases}(1-x)\sqrt{4-x^2} < 0\\ \dfrac{1}{x^2} \ge \dfrac{1}{9}\end{cases}$

найдите целые значения

21) $\begin{cases}\sqrt{x^2-4x} > x-3\\ \sqrt{-x-6}\cdot\sqrt{36-x^2} \le 0\end{cases}$

22) $\begin{cases}(x-2)\cdot\sqrt{x^2-5,5x+6} \ge 0\\ (x+1)\cdot\sqrt{x^2+0,5x-3} \le 0\end{cases}$

ОТВЕТЫ

1) $[-1;0]\cup\{4\}$

2) $\left[-\sqrt{3};0\right)\cup(0;2]$

3) $\{-4\}\cup[2;3]$

4) $(-\infty;-2)\cup[20,5;\infty)$

5) $[0;1)\cup(1;\infty)$

6) $(2;8)$

7) $(-2;-1]\cup\left[-\dfrac{2}{3};\dfrac{1}{3}\right)$

8) $[-3;2]$

9) $\left(-\infty; -\frac{3}{2}\right] \cup \left[\frac{3}{2}; \infty\right)$

10) $[0; 81] \cup [1\,296; \infty)$

11) $\{-1; 3\}$

12) $\left[-2-2\sqrt{6};\ -1\right) \cup \left[-2+2\sqrt{6};\ 3\right]$

13) $(-18; -2) \cup (2; \infty)$

14) $(-\infty; -1) \cup \left[\frac{\sqrt{13}-3}{2}; 2\right)$

15) $(-\infty; -197] \cup [197; \infty)$

16) $(2; 3] \cup [5; 6) \cup (8; 9] \cup [11; 12)$

17) $(-\infty; -2) \cup (0; 1) \cup (1; \infty)$

18) $\{1\} \cup [4; 5)$

19) $\left[1\frac{3}{4}; 4\right)$

20) $\varnothing$

21) $x = -6$

22) $x = 1{,}5$

ГЛАВА III. ПОКАЗАТЕЛЬНАЯ И ЛОГАРИФМИЧЕСКАЯ ФУНКЦИИ

§ 1. РЕШЕНИЕ ПОКАЗАТЕЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ

БЛОК 1. Решите уравнення методом приведення обеих частей уравнення к одному основанню:

А

1) $\left(\frac{3}{7}\right)^{3x-7}=\left(\frac{7}{3}\right)^{7x-3}$

2) $\sqrt[3]{2^{x-1}}=\frac{2}{\sqrt{2}}$

3) $2^x\cdot2^{x-4}=16$

4) $2^{x^2-6x-2,5}=16\sqrt{2}$

5) $2^{3x+1}=32^{-1}$

6) $\left(10^{5-x}\right)^{6-x}=100$

7) $(2,5)^{2x-3}=15\frac{5}{8}$

8) $3^{x^2-7,2x}=\frac{1}{3\sqrt[5]{9}}$

9) $\sqrt{2^x}\cdot\sqrt{3^x}=36$

10) $\left(\frac{4}{9}\right)^x\cdot\left(\frac{27}{8}\right)^{x-1}=\frac{2}{3}$

11) $4^x\cdot5^{x+1}=5\cdot20^{2-x}$

12) $0,25^x=\frac{128}{2^{x-1}}$

13) $(0,5)^{x^2-20x+61,5}=\frac{8}{\sqrt{2}}$

14) $5^{\frac{5-3x}{x-2}}=\frac{1}{25}$

15) $\left(\frac{5}{12}\right)^{2x-3}=(2,4)^{3x-2}$

16) $\sqrt[x]{256}=4^x$

17) $1\,000\cdot\sqrt[x]{0,1}=100^x$

18) $2^{\cos2x}=\sqrt{2}$

19) $\sqrt[x]{3}\cdot\sqrt[x]{5}=225$

B

20) $2^{x^2-3}\cdot 5^{x^2-3}=0{,}01\cdot\left(10^{x-1}\right)^3$

21) $27=\left(\,0,(3)\,\right)^{6-x}$

22) $25^{|1-2x|}=5^{4-6x}$

23) $2^{|x+1|}=\left(\sqrt{2}\right)^{-2x+3}$

24) $\left(3^{x^2-7,2x+3,9}-9\sqrt{3}\right)\cdot\sqrt{5-x}=0$

25) $\left(\sqrt[4]{2}\right)^{4x+5}=\left(\sin\dfrac{\pi}{4}\right)^{\frac{2x}{3}}$

26) $49^{\frac{1}{6}}\cdot 7^{2,5}=7^{\frac{1}{2}}\cdot 7^{-\frac{2}{3}}\cdot 49\cdot x^{0,5}$

27) $16\cdot 2^{\frac{1}{8}}\cdot 8^{\frac{1}{40}}\cdot x=4^3\cdot 2^{\frac{6}{5}}\cdot\left(\dfrac{1}{4}\right)^2$

28) $3^{\left|x^2-3x+2\right|}=9^{x+1}$

29) $3{,}24^{2\sqrt{x}-5}=\left(\dfrac{5}{9}\right)^{5\sqrt{x}+1}$

30) $\dfrac{1}{27}\cdot\sqrt[4]{9^{3x-1}}=27^{-\frac{2}{3}}$

ОТВЕТЫ

1) 1 2) 2,5 3) 4 4) −1; 7

5) −2 6) 4; 7 7) 3 8) 0,2; 7

9) 4 10) 2 11) 1 12) –8

13) 4; 16 14) 1 15) 1 16) 2

17) $x \in \varnothing$ 18) $x = \pm\frac{\pi}{6} + \pi k$ 19) $x \in \varnothing$ 20) 1; 2

21) 9 22) 0,6 23) $\frac{1}{4}$ 24) 0,2; 5

25) $-\frac{15}{16}$ 26) 49 27) 0,5 28) 0; 5

29) 1 30) 1

***В ответах параметр $k \in \mathbb{Z}$.**

<u>БЛОК 2</u>. Решите уравнения методом разложения на множители:

А

1) $5^{x+1} - 5^x = 100$

2) $4 \cdot 3^{x+2} + 5 \cdot 3^x - 7 \cdot 3^{x+1} = 20$

3) $3^{x+1} - 2 \cdot 3^{x-2} = 25$

4) $10^x - 5^{x-1} \cdot 2^{x-2} = 950$

5) $7^{x+2} - \frac{1}{7} \cdot 7^{x+1} - 14 \cdot 7^{x-1} + 2 \cdot 7^x = 48$

6) $2 \cdot 16^x - 2^{4x} - 4^{2x-2} = 15$

7) $5 \cdot 2^{\sqrt{x}} - 3 \cdot 2^{\sqrt{x}-1} = 56$

8) $2^{x-1} + 2^{x-2} + 2^{x-3} = 448$

9) $2^{x+1} + 3 \cdot 2^{x-1} - 5 \cdot 2^x + 6 = 0$

10) $4^{x-1} + 11 \cdot 4^{x-2} = 15 \cdot 2^{-4}$

11) $3^{x-1}\cdot 2^{x+1}+2^{x-1}\cdot 3^{x}=\frac{7}{36}$

12) $3^{2x-3}-9^{x-1}+27^{\frac{2x}{3}}=675$

13) $4^{x-1}+4^{x}+4^{x+1}=84$

14) $5^{x+1}+5^{x}+5^{x-1}=155$

B

15) $3^{3x+1}-4\cdot 27^{x-1}+9^{1,5x-1}=80$

16) $5^{x+6}-3^{x+7}=43\cdot 5^{x+4}-19\cdot 3^{x+5}$

17) $2^{x^2-1}-3^{x^2}=3^{x^2-1}-2^{x^2+2}$

18) $5^{2x}-7^{x}-5^{2x}\cdot 35+7^{x}\cdot 35=0$

19) $x^{2}\cdot 2^{x}+2^{x}=x\cdot 2^{x+1,5}$

20) $3^{x+3}+3^{3}\cdot 3^{x-1}-3=0$

21) $9^{x}-2^{x+0,5}=2^{x+3,5}-3^{2x-1}$

22) $3^{x}+3^{x+1}+3^{x+2}=5^{x}+5^{x+1}+5^{x+2}$

23) $\left(\frac{1}{3}\right)^{2-x}-6\cdot 9^{\frac{x-4}{2}}+2\cdot 3^{x-6}=29$

24) $\left(\frac{1}{3}\right)^{2-x}+3^{x-3}=99+\sqrt{\left(\frac{1}{9}\right)^{4-x}}$

ОТВЕТЫ

1) 2	2) 0	3) 2	4) 3
5) 0	6) 1	7) 16	8) 9

9) 2 10) 0 11) -1 12) 3

13) 2 14) 2 15) 1 16) -3

17) $\pm\sqrt{3}$ 18) 0 19) $\sqrt{2}\pm 1$ 20) $-1-2\log_3 2$

21) 1,5 22) $\log_{\frac{3}{5}}\frac{31}{13}$ 23) 6 24) 6

<u>БЛОК 3</u>. Решите уравнения методом введения новой переменной:

А

1) $4\cdot\left(\frac{3}{2}\right)^{2x}+15\cdot\left(\frac{3}{2}\right)^{x}=54$

2) $0,2\cdot 5^{2x}-4,8\cdot 5^{x}-5=0$

3) $4^{x}-10\cdot 2^{x-1}-24=0$

4) $25^{x}+24\cdot 5^{x-1}-1=0$

5) $2^{x+1}+4^{x}=80$

6) $2^{2x-3}-3\cdot 2^{x-2}+1=0$

7) $9^{x-1}-3^{x+1}+3^{x-3}=1$

8) $5\cdot 49^{3x}=2\cdot 7^{3x}+3$

9) $9^{x}+8\cdot 3^{x-1}-1=0$

10) $33\cdot 2^{x-1}-4^{x+1}=2$

11) $6^{2x}-8\cdot 6^{x}+12=0$

12) $3^{4\sqrt{x}}-4\cdot 3^{2\sqrt{x}}+3=0$

В

13) $17\cdot 2^{\sqrt{x^2-8x}}-8=2\cdot 4^{\sqrt{x^2-8x}}$

14) $5^x-24=\dfrac{25}{5^x}$

15) $10\cdot 5^{x-1}-5^{x+1}+25^x=10$

16) $4^{-x}-\left(\dfrac{1}{2}\right)^{x-1}=8$

17) $\dfrac{4^x-2^{x+2}+3}{2^{\frac{x}{2}}-1}+2^{\frac{x}{2}}+1=0$

18) $\log_2\left(2^x-7\right)=3-x$

19) $2^{x+2}-2^{2-x}-15=0$

20) $8^x-4^x=2^x$

21) $9^{x^2-1}-36\cdot 3^{x^2-3}+3=0$

22) $4^{x+1}+4^{1-x}-10=0$

23) $3\cdot 81^{\frac{1}{x}}-10\cdot 9^{\frac{1}{x}}+3=0$

24) $2^x-0,5^x=3,75$

ОТВЕТЫ

1) 2	2) 2	3) 3	4) -1
5) 3	6) 1; 2	7) 3	8) 0
9) -1	10) -3; 2	11) 1; $\log_6 2$	12) 0; $\dfrac{1}{4}$

13) -1; 9 14) 2 15) 1 16) -2

17) 1 18) 3 19) 2 20) $\log_2\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)$

21) ± 1; $\pm\sqrt{2}$ 22) $\pm 0{,}5$ 23) ± 2 24) 2

БЛОК 4. **Решите однородные уравнения:**

В

1) $9^x + 6^x = 2^{2x+1}$

2) $125\cdot 25^x - 70\cdot 10^x + 8\cdot 4^x = 0$

3) $3\cdot 4^x - 5\cdot 6^x + 2\cdot 9^x = 0$

4) $2^{2x+1} + 3^{2x+1} = 5\cdot 6^x$

5) $3^{2x^2-6x+3} + 6^{x^2-3x+1} = 2^{2x^2-6x+3}$

6) $8\cdot 9^x + 6^{x+1} = 27\cdot 4^x$

7) $4\cdot 2^{2x} - 6^x = 18\cdot 3^{2x}$

8) $3\cdot 16^x + 36^x = 2\cdot 81^x$

9) $2^{2x+1} + 3^{2x+1} = 5\cdot 6^x$

10) $4^x + 6^x = 2\cdot 9^x$

ОТВЕТЫ

1) 0 2) -2; -1 3) 0; 1 4) -1; 0 5) 1; 2

6) 1 7) -2 8) 0,5 9) -1; 0 10) 0

БЛОК 5. Решите логарифмированием обеих частей уравнения:

А

1) $3^x = 10$

2) $\left(\frac{1}{7}\right)^x = 5$

3) $\left(\frac{2}{3}\right)^x = 8$

4) $14^{x^2} = 9$

5) $\left(\frac{7}{5}\right)^{|x-3|} = 2$

ОТВЕТЫ

1) $\log_3 10$

2) $\log_{\frac{1}{7}} 5$

3) $\log_{\frac{2}{3}} 8$

4) $\pm\sqrt{\log_{14} 9}$

5) $3 \pm \log_{\frac{7}{5}} 2$

БЛОК 6. Решите уравнения различными методами:

С

1) $27^x - 13\cdot 9^x + 13\cdot 3^{x+1} - 27 = 0$

2) $3\cdot 4^x + \frac{1}{3}\cdot 9^{x+2} = 6\cdot 4^{x+1} - \frac{1}{2}\cdot 9^{x+1}$

3) $2\cdot 12^x - 3^{x+1} + 4^{x+1} - 6 = 0$

4) $2\cdot 3^{x+1} - 5\cdot 9^{x-2} = 81$

5) $\frac{10^x + 10^{-x}}{10^x - 10^{-x}} = 5$

6) $2^{|3x-5|} = 4\cdot 8^{|x-1|}$

7) $4^{\sin x}+2^{5-2\sin x}=18$

8) $\left(\sqrt{2+\sqrt{3}}\right)^{x}+\left(\sqrt{2-\sqrt{3}}\right)^{x}=4$

9) $\left(\sqrt{3-2\sqrt{2}}\right)^{x}+\left(\sqrt{3+2\sqrt{2}}\right)^{x}=6$

10) $3\cdot 8^{x-1}-2^{2x-1}-2^{x+2}=0$

11) $0,5^{2+4+6+...+2x}=0,5^{72}$

12) $6\cdot\sqrt[x]{9}-13\cdot\sqrt[x]{6}+6\cdot\sqrt[x]{4}=0$

13) $3^{x-5}+3^{x-7}+3^{x-9}=45,5+22,75+11,375+...$

14) $2^{|x+1|}-\left|2^{x}-1\right|=1+2^{x}$

15) $f'(x)=f(0)\cdot e^{-2x}$, если $f(x)=\dfrac{e^{-2x}}{1-8x}$

16) $x^{2}\cdot 2^{\sqrt{x+2}}-2^{\sqrt{x+2}+4}=x^{2}\cdot 2^{x}-2^{x+4}$

17) $x^{2}\cdot 3^{\sqrt{x}}+3^{2x+1}=3^{2+\sqrt{x}}+x^{2}\cdot 3^{2x-1}$

18) $4^{2-x+\sqrt{4-5x+2x^{2}}}-5\cdot 2^{1-x+\sqrt{4-5x+2x^{2}}}=6$

19) $3^{\sqrt{2x+5}}=\dfrac{3^{\sqrt{12x+25}}}{3^{\sqrt{5x+6}}}$

20) $\sqrt[x]{81}-\sqrt[x]{9^{x+1}}+18=0$

21) $2^{\cos x}\cdot 2^{\cos^{2}x}\cdot 2^{\cos^{3}x}\cdot ...=2$

22) $2^{3+|x-1|}=16\cdot 4^{-0,5x}$

23) $3^{3x-1}+27^{x}=2^{2x+1}+7\cdot 4^{x}$

24) $\dfrac{2^x}{5^{x-1}}+3=\dfrac{5^x}{2^{x-1}}$

ОТВЕТЫ

1) $0;\ 1;\ 2$

2) $-\dfrac{1}{2}$

3) $\dfrac{1}{2}(\log_2 3-1)$

4) $4;\ 4-\log_3 5$

5) $\dfrac{1}{2}\lg 1{,}5$

6) $(-\infty;1]$

7) $(-1)^k\dfrac{\pi}{6}+\pi k$

8) ± 2

9) ± 2

10) 2

11) 8

12) $x\in\varnothing$

13) 9

14) $\{-2\}\cup[0;\infty)$

15) $-\dfrac{1}{8};\ \dfrac{5}{8}$

16) $2;\ 4$

17) $1;\ 3$

18) $1;\ 4$

19) 2

20) 2

21) $x=\pm\dfrac{\pi}{3}+2\pi k$

22) $(-\infty;1]$

23) 1

24) 1

***В ответах параметр $k\in\mathbb{Z}$.**

§ 2. РЕШЕНИЕ ПОКАЗАТЕЛЬНЫХ НЕРАВЕНСТВ

БЛОК 1. Решите неравенства методом приведения обеих частей неравенства к степени с одинаковым основанием:

А

1) $6^{x^2+2x} > 6^3$

2) $(0,25)^{x-4} \le \left(\frac{1}{16}\right)^x$

3) $\left(\frac{3}{7}\right)^{\frac{x^2-2x}{x^2}} \ge 1$

4) $(0,1)^{4x^2-2x-2} \le (0,1)^{2x-3}$

5) $3^{2x+3} \cdot 5^{2x+3} < 3^{5x} \cdot 5^{5x}$

6) $\left(\frac{1}{3}\right)^{x^2+2x} > \left(\frac{1}{9}\right)^{16-x}$

7) $3^{x^2-7,2x} > \left(3\sqrt[5]{9}\right)^{-1}$

8) $\frac{1}{5}^{\frac{x^2+2}{x^2-1}} > 25$

9) $\left(0,4^{\frac{1}{x^2-2x-3}}\right)^{6-x} \ge 1$

10) $5^{\frac{2}{x}} \le 0,2^{x-3}$

11) $\left(\frac{2}{3}\right)^{2x^2} > (2,25)^{x^2-10}$

12) $4^{x^2+x-11} > 5^{\log_5 4}$

13) $\frac{37}{10}^{\frac{x^2+2x-15}{x-4}} > 1$

В

14) $3^{\frac{6x-3}{x}} < \sqrt[3]{27^{2x-1}}$

15) $2^{1-2^{\frac{1}{x}}} < 0,125$

16) $\left(\frac{2}{7}\right)^{3(2x-7)} \cdot (12,25)^{\frac{4x+1}{2}} \geq 1$

17) $\left(\sqrt{2}+1\right)^{\frac{6x-6}{x+1}} \leq \left(\frac{1}{\sqrt{2}+1}\right)^{-x}$

18) $\left(\sqrt{5}+2\right)^{x-1} \geq \left(\sqrt{5}-2\right)^{\frac{x-1}{x+1}}$

19) $\sqrt{6-x} \cdot \left(5^{x^2-7,2x+3,9} - 25\sqrt{5}\right) \geq 0$

20) $2^{\sqrt{2x+3}} \geq \frac{1}{2^x}$

21) $\frac{\left(\sqrt{5}\right)^{x-10}}{4^{x-10}} > \frac{5\sqrt{5}}{64}$

22) $\left(\frac{1}{5}\right)^{|x-2|} > \left(\frac{1}{25}\right)^{|x|}$

23) $0,6^{|x-3|} \geq 0,6^{0,5}$

24) $5^{|4x-6|} \geq 25^{3x-4}$

25) $\left(\frac{1}{3}\right)^{\sqrt{x+4}} > \left(\frac{1}{3}\right)^{\sqrt{x^2+3x+4}}$

26) $\left(\frac{1}{3}\right)^{\sqrt{x+2}} > 3^{-x}$

27) $\left(\frac{1}{3}\right)^{x+\frac{1}{2}-\frac{2}{x}} > \frac{1}{\sqrt{27}}$

28) $\left(0,(4)\right)^{x^2-1} > \left(0,(6)\right)^{x^2+6}$

29) $2^{x^2-3}\cdot 5^{x^2-3} - 0,01\cdot\left(10^{x-1}\right)^3 < 0$

30) $16\cdot\left(\frac{1}{4}\right)^{x^2+2x} \le \frac{1}{256}\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^{2x}$

31) $\left(\frac{\pi}{4}\right)^{\frac{x^2-x-6}{x^2-9}} > \arccos\frac{\sqrt{2}}{2}$

32) $\left(0,1(6)\right)^{x-16}\cdot 0,25 < 54$

33) $\left(\frac{1}{3}\right)^6\cdot 3^{x^2} - \frac{1}{243^x} < 0$

34) $8^{x-3} < 3^{2x-6}$

35) $3^{x^2-x} \ge \left(5^{x-1}\right)^x$

ОТВЕТЫ

1) $(-\infty;-3)\cup(1;\infty)$

2) $(-\infty;-4]$

3) $(0;2]$

4) $x\in\mathbb{R}$

5) $(1;\infty)$

6) $(-8;4)$

7) $\left(-\infty;\frac{1}{5}\right)\cup(7;\infty)$

8) $(-1;0)\cup(0;1)$

9) $(-1;3)\cup[6;\infty)$

10) $(-\infty;0)\cup[1;2]$

11) $\left(-\sqrt{5};\sqrt{5}\right)$

12) $(-\infty;-4)\cup(3;\infty)$

13) $(-5;3)\cup(4;\infty)$

14) $\left(0;\frac{1}{2}\right)\cup(3;\infty)$

15) $\left(0;\frac{1}{2}\right)$

16) $(-\infty;11]$

17) $(-1;2]\cup[3;\infty)$

18) $[-2;-1)\cup[1;\infty)$

19) $\left(-\infty;\frac{1}{5}\right]\cup\{6\}$

20) $[-1;\infty)$

21) $(-\infty;13)$

22) $(-\infty;-2)\cup\left(\frac{2}{3};\infty\right)$

23) $[2,5;3,5]$

24) $(-\infty;1,4]$

25) $[-4;-2)\cup(0;\infty)$

26) $(2;\infty)$

27) $(-\infty;-1)\cup(0;2)$

28) $\left(-2\sqrt{2};2\sqrt{2}\right)$

29) $(1;2)$

30) $(-\infty;-3]\cup[2;\infty)$

31) $(-3;3)\cup(3;\infty)$

32) $(13;\infty)$

33) $(-6;1)$

34) $(3;\infty)$

35) $[0;1]$

БЛОК 2. Решите неравенства методом введения новой переменной:

А

1) $25^x \le 6\cdot 5^x - 5$

2) $9^x - 3^x - 6 > 0$

3) $4^{-x+0,5} - 7\cdot 2^{-x} - 4 < 0$

4) $5^{2x+1} > 5^x + 4$

5) $2^x + 11\cdot 2^{0,5x} < 26$

6) $3^{x+2} + 9^{x+1} - 810 > 0$

7) $3 + 2\cdot 3^x - 9^x \ge 0$

8) $0,04^x - 26\cdot 0,2^x + 25 \le 0$

В

9) $\frac{1}{3^x+5} \le \frac{1}{3^{x+1}-1}$

10) $(0,1)^{x+1} < 0,8 + 2\cdot 10^x$

11) $2^{2x+1} - 5\cdot 6^x + 3^{2x+1} \le 0$

12) $3\cdot 4^x + 2\cdot 9^x - 5\cdot 6^x < 0$

13) $\frac{5^x+5^{-x}}{5^x-5^{-x}} < 1$

14) $3\cdot 2^{2x} + 2\cdot 3^{2x} \ge 5\cdot 6^x$

15) $3^x - 3^{1-x} \le 2$

16) $3^{2x+2} + 7^{2x+2} \le 58\cdot 21^x$

17) $4^x - 2\cdot 5^{2x} - 10^x > 0$

18) $\frac{2^x+8}{2^x-1} > 2^x$

19) $5\cdot 4^x + 2\cdot 25^x \le 7\cdot 10^x$

20) $5^x + 5^{3-x} - 30 \le 0$

21) $\frac{2^{1-x}-2^x+1}{2^x-1} \le 0$

22) $4^x - 9\cdot 2^x + 8^{\log_5 7\cdot\log_7 5} < 0$

ОТВЕТЫ

1) $[0;1]$
2) $(1;\infty)$
3) $(-2;\infty)$
4) $(0;\infty)$
5) $(-\infty;2)$
6) $(2;\infty)$

7) $(-\infty; 1]$ 8) $[-2; 0]$ 9) $(-1; 1]$

10) $(-1; \infty)$ 11) $[-1; 0]$ 12) $(0; 1)$

13) $(-\infty; 0)$ 14) $(-\infty; 0] \cup [1; \infty)$ 15) $(-\infty; 1]$

16) $[-2; 0]$ 17) $\left(-\infty; \log_{\frac{2}{5}} 2\right)$ 18) $(0; 2)$

19) $[0; 1]$ 20) $[1; 2]$ 21) $(-\infty; 0) \cup [1; \infty)$

22) $(0; 3)$

БЛОК 3. Решите неравенства методом разложения на множители:

А

1) $3^{\frac{1}{x}} + 3^{\frac{1}{x}+3} > 84$

2) $3^{x+2} - 3^{x} - 72 > 0$

3) $2^{3x} + 2^{3x-1} + 2^{3x-2} \le 448$

4) $2^{5x-1} + 2^{5x-2} + 2^{5x-3} - 896 < 0$

5) $\frac{1}{3^{x-1}} + \frac{1}{3^{x+1}} \le 10$

6) $3^{x^2+1} - \left(\frac{1}{3}\right)^{-x^2} > 162$

7) $2^{x} + (0,5)^{3-x} < 9$

В

8) $3^{x-10}-2^{x-9}-3^{x-11}-2^{x-12}>0$

9) $5^{2x-1}+2^{2x}-5^{2x}+2^{2x+2}>0$

10) $4\cdot 3^{x+2}-2\cdot 5^{x+2}\le 5^{x+3}-3^{x+3}$

11) $2^{x}\cdot 5^{1-x}+2^{x+1}\cdot 5^{-x}>2{,}8$

12) $2^{x+2}-2^{x+3}-2^{x+4}\ge 5^{x+1}-5^{x+2}$

13) $\frac{1}{8}\cdot 6^{3x}-2^{2x}\cdot 3^{3x}\le 0$

14) $9\cdot 3^{2x+2}+3\cdot 3^{2x+1}-9^{x}\le 89$

ОТВЕТЫ

1) $(0;1)$

2) $(2;\infty)$

3) $\left(-\infty;\frac{8}{3}\right]$

4) $(-\infty;2)$

5) $[-1;\infty)$

6) $(-\infty;-2)\cup(2;\infty)$

7) $(-\infty;3)$

8) $(13;\infty)$

9) $(-\infty;1)$

10) $[-2;\infty)$

11) $(-\infty;1)$

12) $[0;\infty)$

13) $(-\infty;3]$

14) $(-\infty;0]$

БЛОК 4. Решите неравенства методом интервалов:

В

1) $\dfrac{x-2\sqrt{x}-8}{2^x-4}\ge 0$

2) $\left(2^x-4\right)\left(x^2-2x-3\right)>0$

3) $\dfrac{9^x-10\cdot 3^x+9}{1-x^2}\ge 0$

4) $\dfrac{4^x-9\cdot 2^x+8}{4-x^2}\ge 0$

5) $(x-6)\left(8^{x-6}-64\right)<0$

6) $\left(5^x-125\right)\left(3^x-81\right)<0$

7) $x^2\cdot 2^x+4\ge x^2+2^{x+2}$

8) $x^2\cdot 3^x-3^{x+4}\le x^2-81$

9) $\dfrac{0,2^x-0,008}{x^2-10x+25}\le 0$

10) $\dfrac{e^{3x-1}-1}{x+8}\ge 0$

11) $\dfrac{4^x+2x-4}{x-1}\le 2$

12) $x^4+3^{x+4}\ge x^4\cdot 3^x+81$

ОТВЕТЫ

1) $[0;2)\cup[16;\infty)$

2) $(-1;2)\cup(3;\infty)$

3) $(-1;0]\cup(1;2]$

4) $(-2;0]\cup(2;3]$

5) $(6;8)$

6) $(3;4)$

7) $[-2;0]\cup[2;\infty)$

8) $(-\infty;-9]\cup[0;9]$

9) $[3;5)\cup(5;\infty)$

10) $(-\infty;-8)\cup\left[\dfrac{1}{3};\infty\right)$

11) $\left[\dfrac{1}{2};1\right)$

12) $(-\infty;-3]\cup[0;3]$

БЛОК 5.

С

Решите системы неравенств:

1) $0<3^{x^2-x-6}<1$

2) $\begin{cases}\left(\frac{1}{2}\right)^{5-2x}<32\\ 3^{x^2+6x}<1\end{cases}$

3) $\begin{cases}2^x\cdot 5^{x-1}\geq 0{,}2\cdot 10^{2-x}\\ 4^x\cdot 5^{x+1}\leq 5\cdot 20^{2-x}\end{cases}$

4) $\begin{cases}9^{x+0{,}5}-10\cdot 3^x+3\leq 0\\ x\geq -0{,}5\end{cases}$

5) $\begin{cases}\dfrac{1}{2-x}\geq 1\\ 2\cdot 4^{2x}\geq 32\end{cases}$

6) $1<3^{|x^2-x|}<9$

7) $\begin{cases}\left(\frac{2}{3}\right)^x\cdot\left(\frac{8}{9}\right)^{-x}>\dfrac{27}{64}\\ 2^{x^2-6x-3{,}5}<8\sqrt{2}\end{cases}$

8) $\begin{cases}3^{x-2}<\dfrac{3}{\sqrt[x]{9}}\\ 6^{x+2}>\left(2^{x^2}\cdot 3^{x+2}\right)\end{cases}$

9) $\begin{cases}9^x-3^{x+1}\leq 54\\ \sqrt{3x-5}<2\end{cases}$

Решите неравенства:

10) $\dfrac{3^{2|x-1|}+3}{4}<3^{|x-1|}$

11) $\left|2^{4x^2-1}-5\right|\leq 3$

12) $2^{x-6}<\sqrt[x]{\dfrac{1}{32}}$

13) $8^{x+\frac{1}{3}}-9\cdot 4^x+2^{x+2}\geq 0$

14) $\frac{9}{81^x}+\frac{17}{27^x}-\frac{2}{9^x}\geq 0$

15) $9^x-84\cdot 3^{-2x}+\frac{1}{3}\geq 0$

16) $\left(\frac{1}{4}\right)^x<2^{3-x}+25^{\frac{1}{\log_3 5}}$

17) $\left(\cos\frac{\pi}{10}\right)^{x^2+x}<1-\sin^2\frac{\pi}{10}$

18) $4^x-2^{2(x-1)}+8^{\frac{2}{3}(x-2)}>52$

19) $8\leq 3^{x^2-2x+1}-1\leq 80$

20) $\left(\frac{1}{9}\right)^{x-0,5x^2}\geq 3^{|3x-12|+2x}$

21) $\left(\frac{2}{5}\right)^{\log_{0,25}\left(x^2-5x+8\right)}\leq 2,5$

22) $3^{72}\cdot\left(\frac{1}{3}\right)^x\cdot\left(\frac{1}{3}\right)^{\sqrt{x}}\geq 1$

ОТВЕТЫ

1) $(-2;3)$

2) $(-6;0)$

3) $x=1$

4) $[-0,5;1]$

5) $[1;2)$

6) $(-1;0)\cup(0;1)\cup(1;2)$

7) $(-1;3)$

8) $x\in\varnothing$

9) $\left[\frac{5}{3};2\right]$

10) $(0;1)\cup(1;2)$

11) $\left[-1;-\frac{1}{\sqrt{2}}\right]\cup\left[\frac{1}{\sqrt{2}};1\right]$

12) $\{2;3;4\}$

13) $(-\infty;-1]\cup[2;\infty)$

14) $(-\infty;2]$

15) $[1;\infty)$

16) $\left(\log_2\frac{1}{9};\infty\right)$

17) $(-\infty; -2)\cup(1; \infty)$

18) $(3; \infty)$

19) $\left[-1; 1-\sqrt{2}\,\right]\cup\left[1+\sqrt{2}; 3\right]$

20) $(-\infty; -3\,]\cup[\,4; \infty)$

21) $[\,1; 4\,]$

22) $[\,0; 64\,]$

§ 3. ТОЖДЕСТВЕННЫЕ ПРЕОБРАЗОВАНИЯ ЛОГАРИФМИЧЕСКИХ ВЫРАЖЕНИЙ

БЛОК 1. Вычислите, используя основное логарифмическое тождество:

А

1) $27^{\log_3 2}$

2) $\left(\frac{1}{25}\right)^{4\log_5 2}$

3) $5^{\log_5 7-3}$

4) $10^{3\lg 2}$

5) $e^{5\ln\sqrt{6}}$

6) $\sqrt[4]{4^{6\log_8 5-\log_{\sqrt{2}}125}}$

7) $32^{\log_4 3-0{,}5\log_2 3}$

8) $\left(\sqrt[3]{2}\right)^{6-\log_2 27}$

9) $25^{\log_{0,2}4}$

10) $\left(\frac{16}{25}\right)^{\log_{\frac{125}{64}}3}$

11) $\dfrac{4^{\log_2 3}}{2^{\frac{1}{3}\log_2 27}}$

12) $\left(\sqrt{3}\right)^{\log_3 4+\log_{\sqrt{3}}\sqrt{2}}$

13) $7^{-\log_{\frac{1}{7}}5-\frac{1}{3}\log_{\sqrt[3]{7}}4}$

14) $5^{2\log_{25}\operatorname{tg}30^\circ}\cdot 2^{-\log_{0,5}\operatorname{tg}60^\circ}$

15) $9^{3-\log_3 54}+7^{-\log_7 2}$

16) $5^{2\log_{25}8+\log_{\frac{1}{5}}5}$

17) $2^{\log_{\sqrt{2}}5+2\log_{0.5}5}$

18) $20\cdot 100^{\frac{1}{2}\lg 9-\lg 2}$

19) $\left(1+4^{\log_2\sqrt{2}}\right)^{\frac{1}{2}}\cdot\cos\frac{13\pi}{6}$

B

20) $36^{\frac{1}{2}-\log_6 5}-5^{\log_5 5}+2^{3-\log_2 10}+4$

21) $2^{4\log_2 3-1}+3^{2-\log_3 18}-32,5$

22) $2^{3\log_2 5+4}+4^{2\log_4 3}-2\,009$

23) $0,2^{\frac{1}{2}\log_5 4-\log_{25}16}$

24) $4^{0,5\log_4 9-0,25\log_2 25}$

25) $36^{\left(\frac{1}{3}\log_6 8+2\log_6 3\right)}$

26) $4^{0,25\log_2 4+2\log_{16}4}$

27) $\dfrac{5^{\log_5 2}+10^{1-\lg 2}}{2^{\log_2 5}}$

28) $36^{\log_6 5}+10^{1+\lg 2}-3^{\log_9 36}$

29) $2^{2-\log_2 5}+\left(\dfrac{1}{2}\right)^{\log_2 5}$

30) $\log_{0,6}\left(\log_8 32\right)+49^{\log_{\sqrt{7}}\sqrt{2}}$

31) $\left(\sqrt[3]{25}\right)^{\log_5\sqrt{27}}-\left(\sqrt{\sqrt[3]{5}}\right)^{\log_5 64}$

32) $4^{\log_5 0,2+\frac{1}{\log_5 4}}+\dfrac{\log_2 5}{\log_8 625}$

33) $7\cdot\left(4^{\log_{\sqrt[4]{4}}3}-7^{3\log_{49}16}-5\right):3^{\log_{27}14^3}$

34) $36^{\log_6 5}+10^{2-\lg 4}-4^{\log_4 49}$

ОТВЕТЫ

1) 8	2) $\frac{1}{256}$	3) $\frac{7}{125}$	4) 8	5) $36\sqrt{6}$
6) 0,04	7) 1	8) $\frac{4}{3}$	9) $\frac{1}{16}$	10) $\frac{1}{\sqrt[3]{9}}$
11) 3	12) $2\sqrt{2}$	13) 1,25	14) 1	15) $\frac{3}{4}$
16) 1,6	17) 1	18) 45	19) 1,5	20) 0,04
21) 8,5	22) 0	23) 2	24) 0,6	25) 324
26) 8	27) $\frac{7}{5}$	28) 39	29) 1	30) 3
31) 1	32) 2	33) 6	34) 1	

БЛОК 2. Вычислите, применяя определение логарифма:

А

1) $\log_{\frac{1}{8}}\sqrt[4]{32}$

2) $\log_9\sqrt[3]{\frac{1}{3}}$

3) $\log_2\sin 135°$

4) $\log_8\sqrt[3]{\frac{1}{2}}$

5) $\log_{\frac{1}{7}}\left(\frac{1}{\sqrt[3]{49}}\right)$

6) $\log_{\sqrt[4]{2}}8$

7) $\log_5 \frac{25}{\sqrt[3]{5}}$

8) $\log_{\frac{1}{3}} \sqrt[3]{9}$

9) $\log_{0,(3)} \frac{1}{\sqrt[5]{9}}$

10) $\log_a a\sqrt{a\sqrt{a}}$

11) $\log_{\frac{1}{3}\sqrt[5]{3}} \frac{1}{243}$

12) $\log_2 \frac{\sqrt[4]{32}\cdot\sqrt[3]{2}}{\sqrt{8}}$

ОТВЕТЫ

1) $-\frac{5}{12}$ 2) $-\frac{1}{6}$ 3) $-\frac{1}{2}$ 4) $-\frac{1}{9}$ 5) $\frac{2}{3}$

6) 12 7) $\frac{5}{3}$ 8) $-\frac{2}{3}$ 9) $\frac{2}{5}$ 10) $\frac{7}{4}$

11) $\frac{25}{4}$ 12) $\frac{1}{12}$

БЛОК 3. Вычислите, применяя формулы логарифмов произведения, частного и степени:

А

1) $\log_2 \log_4 \log_8 64$

2) $4\log_{\frac{1}{2}} 3 - \frac{2}{3}\log_{\frac{1}{2}} 27 - 2\log_{\frac{1}{2}} 6$

3) $\frac{2}{3}\lg 0,001 + \lg\sqrt[3]{1\,000} - \frac{3}{5}\lg\sqrt{100\,000}$

4) $\log_{\sqrt{\frac{2}{3}}}\left(\log_9 27\right)$

5) $\log_{\frac{1}{2}}\left(\log_3 \cos\frac{\pi}{6} - \log_3 \sin\frac{\pi}{6}\right)$

6) $\log_{\frac{1}{4}}\left(\sqrt{7}-\sqrt{3}\right) + \log_{\frac{1}{4}}\left(\sqrt{7}+\sqrt{3}\right)$

7) $2\log_2 6 + \log_2 \frac{35}{9} - \log_2 35$

8) $\log_4 \frac{1}{5} + \log_4 36 + \frac{1}{2}\log_4 \frac{25}{81}$

9) $2\lg 5 + \frac{1}{2}\lg 16$

10) $\log_{36} 84 - \log_6 \sqrt{14}$

11) $\dfrac{\lg 27 + \lg 12}{\lg 2 + 2\lg 3}$

12) $\log_{25} \log_{32} \log_6 36$

13) $\frac{1}{4}\log_6 16 - 3\log_{\frac{1}{6}} \sqrt[3]{3}$

14) $\left(\lg 300 - \lg 15 - \lg 2\right)^{-26}$

15) $\frac{1}{2}\log_{14} 49 - 4\log_{\frac{1}{14}} \sqrt[4]{2}$

16) $\log_2 \log_2 \log_2 3^{2\log_3 4}$

17) $3\log_2\left(\log_4 16\right) + \log_{\frac{1}{2}} 2$

18) $\log_3 \frac{1}{27} + \log_{\sqrt{3}} 9$

19) $\log_{\sqrt{3}} \log_9 729$

20) $\log_4 \log_{11} 121 + \log_{16} \sqrt{2}$

21) $\log_8 \log_{14} 196 - \log_7 \sqrt{7}$

22) $\log_5 175 - \log_5 7 - \left(\log_3 8 + 3\log_3 \frac{3}{2} \right)$

23) $\dfrac{3\log_3 2 - \log_3 24}{\log_3 3 + \log_3 9}$

B

24) $\log_{\frac{1}{2}} 16 \cdot \log_5 \frac{\sqrt[3]{5}}{25} : 9^{\log_3 2}$

25) $\frac{3}{7}\left(\log_6 2 + \log_6 3 + 2^{\log_2 4} \right)^{2\log_5 7}$

26) $\sqrt[3]{\log_{\sqrt{2}}\left(2\sin\frac{\pi}{8} \right) + \log_{\sqrt{2}}\left(\cos\frac{\pi}{8} \right)}$

27) $\log_5\left(\sqrt{26} + 1 \right) + \log_{\sqrt{5}} \sqrt{\sqrt{26} - 1}$

28) $\dfrac{\log_8 7}{\log_{\sqrt[3]{2}}\left(\frac{1}{49} \right)}$

29) $\log_2\left(1 - \cos^2 \frac{11\pi}{6} \right)$

30) $\log_{\frac{1}{7}}\left(\frac{\sqrt[5]{7}}{49}\cdot 5^{\log_{\sqrt{5}}\sqrt[3]{49}}\right)$

31) $\dfrac{\log_6 30-\frac{1}{2}\log_6 150}{\log_7 14-\frac{1}{3}\log_7 56}$

32) $\log_2 \sin\frac{\pi}{6}+\log_2 \cos\frac{7\pi}{4}+\log_2 \operatorname{tg}\frac{5\pi}{4}$

ОТВЕТЫ

1) -1	2) 2	3) $-2,5$	4) -2	5) 1
6) -1	7) 2	8) 1	9) 2	10) $\frac{1}{2}$
11) 2	12) $-\frac{1}{2}$	13) 1	14) 1	15) 1
16) 1	17) 2	18) 1	19) 2	20) $\frac{5}{8}$
21) $-\frac{1}{6}$	22) -1	23) $-\frac{1}{3}$	24) $\frac{5}{3}$	25) 21
26) -1	27) 2	28) $-\frac{1}{18}$	29) -2	30) $\frac{7}{15}$
31) $\frac{3}{4}$	32) $-1,5$			

БЛОК 4. **Вычислите, применяя формулы перехода к другому основанию:**

А

1) $\log_6 4 + \log_6 9 + \log_4 6 \cdot \log_{\sqrt{6}} 2 + 5^{\log_5 2}$

2) $\left(3\log_7 2 - \log_7 24\right) : \left(\log_7 3 + \log_7 9\right)$

3) $3^{\frac{2}{\log_5 3}} + \dfrac{\log_2 \frac{1}{3}}{\log_4 81}$

4) $\log_{\sqrt{2}}\left(\log_2 3 \cdot \log_3 4\right)$

5) $2^{\frac{3}{\log_{\sqrt[3]{6}} 2}}$

6) $6^{\frac{2}{\log_3 36}+1}$

7) $4^{\frac{1}{\log_9 2}} + 3^{\frac{1}{\log_4 \sqrt{3}}}$

8) $\log_3 64 \cdot \log_2 \dfrac{1}{27}$

9) $\left(49^{\frac{1}{\log_5 7}} - 1\right)^{\log_{24} 2}$

10) $6\log_2 125 \cdot \log_5 2 + 2^{\lg 7} \cdot 5^{\lg 7}$

B

11) $\log_5 4 \cdot \log_6 5 \cdot \log_7 6 \cdot \log_8 7$

12) $\log_3 7 \cdot \log_7 5 \cdot \log_5 4 + 1$

13) $\dfrac{\log_5 30}{\log_{30} 5} - \dfrac{\log_5 150}{\log_6 5}$

14) $\dfrac{\log_3 12}{\log_{36} 3} - \dfrac{\log_3 4}{\log_{108} 3}$

15) $\sqrt{2^{2+\frac{1}{\log_3 2}} + 25^{-\frac{1}{2\log_3 5}} + 1}$

16) $\dfrac{\log_2 40}{\lg 2} - \dfrac{\log_2 5}{\log_{80} 2}$

17) $\sqrt[3]{2^{\log_8 125} + \log_3 5 \cdot \log_5 27}$

18) $\log_2 125 \cdot \log_5 4 - \lg\left(10^{1-\log_2 \cos 2\pi}\right)$

19) $\log_3 2 - \sqrt{\log_3 2 \cdot \left(\log_3 6 + \dfrac{\log_3 6}{\log_3 2}\right)}$

20) $\dfrac{\log_{15} 3 \cdot \log_{\frac{1}{5}} 3}{\log_{15} 3 + \log_{\frac{1}{5}} 3}$

21) $\dfrac{\log_{28} 7 \cdot \log_{\frac{1}{4}} 7}{\log_{28} 7 + \log_{\frac{1}{4}} 7}$

22) $\log_3 5 \cdot \log_4 9 \cdot \log_5 2$

23) $81^{\frac{1}{\log_6 3}} - 27^{\log_9 36} - 3^{\frac{4}{\log_7 9}}$

ОТВЕТЫ

1) 5	**2)** $-\frac{1}{3}$	**3)** 24,5	**4)** 2	**5)** 6
6) 18	**7)** 97	**8)** -18	**9)** 2	**10)** 25
11) $\frac{2}{3}$	**12)** $\log_3 12$	**13)** 1	**14)** 2	**15)** 4
16) 3	**17)** 2	**18)** 5	**19)** -1	**20)** 1
21) 1	**22)** 1	**23)** 1 031		

БЛОК 5. Вычислите одни логарифмы через другие:

А

1) Дано: $\lg 5 = a$, $\lg 3 = b$. Найдите $\lg 75$.

2) Дано: $\lg 2 = a$, $\lg 15 = b$. Найдите $\lg 60$.

3) Дано: $\log_5 2 = a$, $\log_5 3 = b$. Найдите $\log_5 72$.

4) Дано: $\log_2 3 = a$, $\log_2 10 = c$. Найдите $\log_5 6$.

5) Дано: $\log_b a = 5$. Найдите $\log_a \left(a^2 b^2\right)$.

6) Дано: $\log_6 2 = a$. Найдите $\log_6 9$.

В

7) Дано: $\log_{14} 7 = a$, $\log_{14} 5 = b$. Найдите $\log_{175} 56$.

8) Дано: $\lg 5 = a$, $\lg 3 = b$. Найдите $\log_{30} 8$.

9) Дано: $\log_3 12 = a$. Найдите $\log_3 18$.

10) Дано: $\log_6 2 = a$, $\log_6 5 = b$. Найдите $\log_3 5$.

11) Дано: $\log_{14} 7 = a$, $\log_{14} 5 = b$. Найдите $\log_5 28$.

12) Дано: $\log_a b + \log_a^{-1} b = 3$. Найдите $\log_a^2 b + \log_a^{-2} b$.

13) Дано: $a^2 + b^2 = 7ab$. Найдите $\dfrac{2\lg\left(\dfrac{a+b}{3}\right)}{\lg a + \lg b}$.

14) Дано: $13ab = 4a^2 + 9b^2$. Найдите $\dfrac{2\lg(2a+3b) - 2\lg 5}{\lg a + \lg b}$.

15) Дано: $\log_{12} 2 = a$. Найдите $\log_6 32$.

16) Дано: $\log_{36} 8 = a$. Найдите $\log_{36} 9$.

ОТВЕТЫ

1) $2a+b$ 2) $2a+b$ 3) $3a+2b$ 4) $\dfrac{1+a}{c-1}$ 5) 2,4

6) $2-2a$ 7) $\dfrac{3-2a}{a+2b}$ 8) $\dfrac{3(1-a)}{1+b}$ 9) $\dfrac{a+3}{2}$ 10) $\dfrac{b}{1-a}$

11) $\dfrac{2-a}{b}$ 12) 7 13) 1 14) 1 15) $\dfrac{5a}{1-a}$

16) $1-\dfrac{2}{3}a$

БЛОК 6. **Упростите:**

C

1) $\dfrac{5^{\lg 20}}{20^{\lg 5+1}}$

2) $\dfrac{\log_5^2\left(7\sqrt{5}\right)+2\log_5^2 7-3\log_5\left(7\sqrt{5}\right)\cdot\log_5 7}{\log_5\left(7\sqrt{5}\right)-\log_5 49}$

3) $\dfrac{\lg^2 5-2\lg 5\cdot\lg 2-3\lg^2 2}{2(\lg 5-3\lg 2)}$

4) $\dfrac{5^{\log_3 7+1}}{7^{\log_3 5}}$

5) $\dfrac{3\log_5 15\cdot\log_5 9-2\log_5^2 15-\log_5^2 9}{\log_5 9-\log_5 15}$

6) $\left(\dfrac{\log_{36} 9}{\log_{25} 49}+\dfrac{\log_{49} 25}{\log_9 36}\right)\cdot\log_5 7+2\log_6 2$

7) $\left(\log_5 2+\log_2 5+2\right)\left(\log_5 2-\lg 2\right)\log_2 5-\log_5 2$

8) $\log_3 4\cdot\log_4 5\cdot\log_5 6\cdot\log_6 7\cdot\log_7 8\cdot\log_8 9$

9) $10^{\log_2 3\cdot\log_5 3\cdot\left(\log_2 3+\log_5 3\right)^{-1}}$

10) $10^{-\lg 4}+100^{-\lg 4}+1\,000^{-\lg 4}+\ldots$

1) $\left(3^{2+\frac{\log_3 4}{\log_4 3}} - 9\cdot 4^{\frac{1}{\log_4 3}} + 4^{1+\log_4 25}\right)^{\frac{1}{2}}$

12) $\log^2_{\sqrt[5]{5}} \sqrt{5} - \log_{\sqrt[3]{5}} 5\sqrt{5} + \log_{\sqrt{3}+1}\left(4+2\sqrt{3}\right)$

13) $2^{6\log_{2\sqrt{2}}\left(5-\sqrt{10}\right)+8\log_{\frac{1}{4}}\left(\sqrt{5}-\sqrt{2}\right)}$

14) $\log_{12}18\cdot\log_{24}54+5\left(\log_{12}18-\log_{24}54\right)$

15) $\left(\log_3 4+\log_2 9\right)^2-\left(\log_3 4-\log_2 9\right)^2$

16) $\lg 5\cdot\lg 20+\lg^2 2$

17) Определите, какое из чисел больше:

$A=\log_2 7\cdot\log_7 9\cdot\log_9 16$ или $B=\pi$.

18) Определите, какое из чисел больше:

$A=\log_5 7\cdot\log_7 9\cdot\log_9 11\cdot\log_{11} 25$ или $B=\sqrt{5}$.

ОТВЕТЫ

1) 0,05	2) 0,5	3) $\frac{1}{2}$	4) 5	5) 2
6) 2	7) 1	8) 2	9) 3	10) $\frac{1}{3}$
11) 10	12) 3,75	13) 25	14) 1	15) 16
16) 1	17) $A>B$	18) $A<B$		

§ 4. РЕШЕНИЕ ЛОГАРИФМИЧЕСКИХ УРАВНЕНИЙ

БЛОК 1. Решите уравнения, используя определение логарифма:

А

1) $\log_x \left(\sqrt[4]{500}\right)^3 = -\dfrac{3}{4}$

2) $\log_{11} \log_3 \log_2 \dfrac{2}{1-x} = 0$

3) $\log_{\frac{64}{7+x}} 8 - \dfrac{1}{2} = 0$

4) $\log_2 \log_3 \log_2 (10x+12) = 1$

5) $\log_3 \log_2 \left(4^x - 8\right) = 1$

6) $\log_4 x + 3\log_2 x = 7$

7) $\log_9 x + 2\log_3 x = 5$

8) $3^{\log_2 1{,}5x} = \log_7 343$

9) $3^{\log_4(-5x)} = \log_5 125$

10) $2\log_{\log_2 x} 2 = 1$

11) $\log_{\sqrt{6-x}} 3 - 2 = 0$

12) $\log_3 |2x-1| = 2$

13) $\log_{16} x + \log_4 x + \log_2 x = 7$

14) $\log_4 \log_3 \log_2 \left(x^2 - 1\right) = 0$

15) $\log_{x+2}\left(3x^2-12\right)=2$

16) $\log_x\left(64\cdot\sqrt[3]{4}\right)=1\frac{2}{3}$

17) $\log_{x+20}\left(2x-\sqrt{x+20}\right)=\frac{1}{2}$

18) $2^{\frac{1}{\log_8 x}}=\frac{1}{64}$

19) $\ln(2x+1)\cdot\ln(9-4x)=0$

B

20) $\log_x\sqrt[3]{4}=0,1(6)$

21) $\log_x\left(36\cdot\sqrt[3]{36}\right)=2,(6)$

22) $\log_x\left(8\cdot\sqrt[5]{0,25}\right)=\frac{13}{5}$

23) $\left(3x^2-5x-2\right)\log_3(5-4x)=0$

24) $\left(4x^2+5x-6\right)\log_2(2x-6)=0$

25) $\log_3\left(3^x-2\right)=1-x$

26) $\log_2\left(9-2^x\right)=10^{\lg(3-x)}$

27) $\log_5\left(2+3\cdot5^{-x}\right)=x+1$

28) $\log_2\left(5\cdot2^x+3\right)=2x+1$

29) $\log_7\left(6+7^{-x}\right)=x+1$

30) $\lg\left(81\cdot\sqrt[3]{3^{x^2-8x}}\right)=0$

31) $\log_{2x+7}\left(2\sqrt{2x+7}-2x+5\right)=0,5$

32) $\log_6\left(5+6^{-x}\right)=x+1$

33) $\log_{256}x^2+\log_{16}x^2+\log_4 x^2=7\log_7 7$

34) $\log_8\left(4-\log_6(5-x)\right)=\frac{1}{3}$

ОТВЕТЫ

1) $\frac{1}{500}$	2) $\frac{3}{4}$	3) -6	4) 50
5) 2	6) 4	7) 9	8) $\frac{4}{3}$
9) $-0,8$	10) 16	11) 3	12) -4; 5
13) 16	14) ± 3	15) 4	16) 16
17) 5	18) $\frac{1}{\sqrt{2}}$	19) 0; 2	20) 16
21) 6	22) 2	23) $-\frac{1}{3}$; 1	24) 3,5
25) 1	26) 0	27) 0	28) $\log_2 3$
29) 0	30) 2; 6	31) 4,5	32) 0
33) ± 16	34) -31		

Б ЛОК 2. Решите уравнения, используя основное логарифмическое тождество:

А

1) $2^{\log_4(x-8,5)}=\log_3 81$

2) $x=81^{\frac{1}{4}+\log_{81}4}$

3) $3x^2+5^{\log_5 x}=16^{\log_4\sqrt{30}}$

4) $0,1^{\lg(36-4x)}=\lg 10^{10}$

5) $9^{\log_3 x}-12\cdot 3^{\log_3 x}+3^{\log_3 27}=0$

6) $\log_4\left(2^{4x}\right)=2^{\log_2 4}$

7) $9^{\log_3(1-2x)}=5x^2-5$

8) $2\cdot 4^{\log_2 x}=7x+4$

9) $7^{\log_7\sqrt{x^2-9}}=2^{\log_2\left(21-x^2\right)}$

10) $2^{-2\log_{0,25}\left(1-2x^2\right)}=0,5\log_{\frac{1}{3}}9^x$

11) $x^{\log_{\sqrt{x}}2x}=4$

ОТВЕТЫ

1) 24,5 2) 12 3) 3 4) $8\frac{39}{40}$ 5) 3; 9

6) 2 7) $-2-\sqrt{10}$ 8) 4 9) $\pm 3\sqrt{2}$ 10) $-\frac{1}{2}$

11) $x\in\varnothing$

БЛОК 3. **Решите уравнения методом потенцирования:**

А

1) $\log_2(x+5)+\log_2(2x-1)+2=\log_2 52$

2) $\log_5(x-4)+\log_5 x=\log_5(x+14)$

3) $\log_2(x+3)+\log_2(x-1)=2+\log_{\frac{1}{2}}\frac{1}{8}$

4) $\log_2\sqrt{x-4}+\log_2\sqrt{2x-1}=\log_2 3$

5) $\lg\sqrt{x-5}+\lg\sqrt{2x-3}+1=\lg 30$

6) $\log_{\sqrt[3]{3}}(x-2)+2\log_3(x-2)=10$

7) $\log_3(x+4)+\log_3(x-1)=1+\dfrac{1}{\log_2 3}$

8) $\lg(x-1)+\lg(x+1)=3\lg 2+\lg(x-2)$

9) $\lg(x-1)^3-3\lg(x-3)=\lg 8$

10) $\ln\sqrt{5x-x^2}-\dfrac{1}{2}\ln(5-x)=0$

11) $\log_3(x^2-7)=2\log_3\sqrt{x-1}$

12) $\log_3 x=1+\log_3(4-x)^{\frac{1}{2}}$

13) $\log_{5-x^2}(2x^2-8x-2)=1+\log_{5-x^2}2$

14) $\log_{\sqrt{2}}(x^2+2x-1)-\log_{\sqrt{2}}x=2$

15) $\log_3 x + \log_3(x+4) = \dfrac{1}{\log_5 3}$

16) $2\log_7(x-2) = \log_7(x-10)^2 - 2$

17) $\log_2(3-x) - \log_{\frac{1}{2}}(1-x) = 3$

18) $\log_4(2x^2 - x + 1) = \log_2(2x)$

19) $3\log_8(x-2) = \log_2\sqrt{2x-1}$

20) $\log_2(21-\sqrt{x}) = \log_2(\sqrt{x}-3) + 1$

21) $\log_5 x + \log_{25} x = \log_{\frac{1}{5}}\sqrt{3}$

B

22) $\lg(x+5) - \lg(3x+25) = \lg(x-15) - \lg 17$

23) $1 + \log_3\dfrac{x+2}{x+5} = \dfrac{1}{4}\log_{\sqrt{3}}(x-2)^2$

24) $\log_5\dfrac{x+8}{x-3} = \dfrac{1}{6}\log_{\sqrt[3]{5}}(x-4)^2 - 1$

25) $\lg(2^x+1) - \lg 6 = x\lg 5 - x$

26) $\lg(2^x + x - 1) = x(1-\lg 5)$

27) $\log_2(2^x+3) + \log_2(5-2^x) = 4$

28) $\log_3(8+3^x) + \log_3(10-3^x) = 4$

29) $\lg\left(x^3+1\right)-0,25\cdot\lg\left(x^2+2x+1\right)^2=\lg 3$

30) $\log_5 x^2=0,5\cdot\log_5(4x-3)^2$

31) $\log_x\sqrt{3}-\log_{x^2}27=\dfrac{1}{2}$

32) $\log_2\sqrt{x+1}-1=\log_2 3-\log_2\sqrt{2x+3}$

33) $\log_4\left(25^x-4\cdot5^x+43\right)=2+\log_4 3$

ОТВЕТЫ

1) 1,5	2) 7	3) 5	4) 5	5) 6
6) 11	7) 2	8) 3; 5	9) 5	10) 1
11) 3	12) 3	13) −1	14) 1	15) 1
16) 3	17) −1	18) 0,5	19) 5	20) 81
21) $\sqrt[3]{\dfrac{1}{3}}$	22) 20	23) 4	24) 14	25) 1
26) 1	27) 0	28) 0	29) 2	30) $-2\pm\sqrt{7}$; 1; 3
31) $\dfrac{1}{9}$	32) 3	33) 1		

<u>БЛОК 4</u>. Решите уравнения методом введения новой переменной:

А

1) $\dfrac{17-\lg x}{4\lg x}=4\lg x$

2) $\log_2^2 x+\log_2 x^2=-1$

3) $\log_4^2 x + \log_4 \sqrt{x} = 1{,}5$

4) $\dfrac{\log_2^2 x - \log_2 x - 2}{\log_2 x + 1} = 1$

5) $4 - \lg x = 3\sqrt{\lg x}$

6) $\lg^2 x + 2\log_{100} x - 6 = 0$

7) $\lg^2\left(\dfrac{1}{x-1}\right) + \lg(x-1) = \lg 100$

8) $\dfrac{1}{5 - \lg x} + \dfrac{2}{1 + \lg x} = 1$

B

9) $0{,}5\lg x \cdot \lg 0{,}001x = \lg 0{,}1$

10) $\dfrac{1}{\lg x} + \dfrac{1}{\lg 10x} + \dfrac{3}{\lg 100x} = 0$

11) $0{,}1 \cdot \lg^4 x - \lg^2 x + 0{,}9 = 0$

12) $\lg^2(100x) + \lg^2(10x) = 14 \cdot \lg x + 15$

13) $\log_4^2 x^2 + \log_4 x^4 = 8$

14) $\log_{\frac{1}{3}}^2 \dfrac{1}{x} + 3\log_3 \dfrac{1}{3} = \log_3 x^2$

15) $\dfrac{\log_2 x}{\log_4 2x} = \dfrac{\log_8 4x}{\log_{16} 8x}$

16) $\log_3 x = 1 + \log_x 9$

17) $\dfrac{\lg^2(10x)}{5-\lg x}=1$

18) $4^{\log_5 x}-5\cdot 2^{\log_5 x}+2^{\log_5 25}=0$

19) $\lg^2(10x)+\lg x-19=0$

20) $x+\log_2\left(2^x-31\right)=5$

21) $\lg\left(10x^2\right)\cdot\lg x=1$

22) $4^{\log_2 \lg x}=\lg x-\lg^2 x+1$

23) $\log_3 x\cdot\log_9(3x)=2\log_9 3$

24) $\log_{0,5}\left(\log_2^2 x-3\log_2 x+4\right)=-1$

25) $2\log_{-x}^2 4+3\log_{-x} 4-2=0$

26) $\log_{\frac{1}{4}}^2(-x)-\log_{\frac{1}{4}}(-x)-2=0$

ОТВЕТЫ

1) $10^{-\frac{17}{16}};\ 10$

2) $\frac{1}{2}$

3) $\frac{1}{8};\ 4$

4) 8

5) 10

6) $10^{-3};\ 10^2$

7) 1,01; 11

8) 100; 1000

9) 10; 100

10) $10^{\frac{-4\pm\sqrt{6}}{5}}$

11) 0,001; 0,1; 10; 1000

12) $10^{-1};\ 10^5$

13) $\pm\frac{1}{16};\ \pm 4$

14) $\frac{1}{3};\ 27$

15) $\frac{1}{16};\ 2$

16) $\frac{1}{3}$; 9

17) 10^{-4}; 10

18) 1; 25

19) 10^{-6}; 10^{2}

20) 5

21) 0,1; $\sqrt{10}$

22) 10

23) $\frac{1}{9}$; 3

24) 2; 4

25) -16; $-\frac{1}{2}$

26) -4; $-\frac{1}{16}$

<u>БЛОК 5</u>. Решите уравнения методом приведения логарифмов к одному основанию:

В

1) $\log_x 2 - \log_4 x + \frac{7}{6} = 0$

2) $\log_x 2 + \log_{4x} 4 = 1$

3) $\log_x 2 \cdot \log_{2x} 2 = \log_4 2$

4) $\log_7 x + \log_x 7 = 2,5$

5) $\log_{3x} 3 = \log_{x^2} 3$

6) $\log_x(3x-4) + \log_{3x-4}(x) = 2$

7) $\log_{x^2} 16 + \log_{2x} 64 = 3$

8) $\log_2(x+1) + \frac{1}{\log_x 2} = \log_2 30$

9) $\log_5 x \cdot \log_3 x = 9\log_5 3$

10) $1 + \log_2(x-1) = \log_{x-1} 4$

11) $\log_x\left(5x^2\right)\cdot\log_5^2 x=1$

12) $\log_2 x+\log_3 x=1$

13) $\log_2 x+\log_5 x=\log_5 10$

14) $\log_x 2\cdot\log_{\frac{x}{16}} 2=\log_{\frac{x}{64}} 2$

15) $\log_2 x+\log_x 2=\dfrac{10}{3}$

16) $\log_2\left(x+4\right)=\log_{4x+16} 8$

17) $1+2\log_x 2\cdot\log_4\left(10-x\right)=\dfrac{2}{\log_4 x}$

18) $\log_3\left(2x+1\right)=2\log_{2x+1} 3+1$

19) $\dfrac{1}{\log_x 10}+\dfrac{1}{\log_{x+3} 10}=1$

20) $\lg^2\left(10x\right)+\dfrac{1}{\log_x 10}=5$

ОТВЕТЫ

1) $\dfrac{1}{\sqrt[3]{4}}$; 8   2) $\dfrac{1}{2}$; 4   3) $\dfrac{1}{4}$; 2   4) $\sqrt{7}$; 49

5) 3   6) 2   7) $\dfrac{1}{\sqrt[3]{2}}$; 4   8) 5

9) $\dfrac{1}{27}$; 27   10) $\dfrac{5}{4}$; 3   11) $\dfrac{1}{5}$; $\sqrt{5}$ 12) $2^{\log_6 3}$

13) 2   14) 4; 8   15) $\sqrt[3]{2}$; 8   16) $-3\dfrac{7}{8}$; -2

17) 2; 8 18) $-\frac{1}{3}$; 4 19) 2 20) 0.0001; 10

БЛОК 6. Решите уравнения методом логарифмирования обеих частей уравнения:

B

1) $x^{\lg x} = 1\,000\,x^2$

2) $x^{\lg x - 3} = 0{,}01$

3) $x^{\log_5 x} = 625$

4) $x^{\frac{\lg x + 5}{3}} = 10^{5 + \lg x}$

5) $x^{\frac{\lg x + 7}{4}} = 10^{\lg x + 1}$

6) $x^{1 + \log_3 x} = 9x^2$

7) $16^{\log_x 2} = 8$

8) $100x = x^{\lg x}$

9) $x^{3 - 4\lg x} = 0{,}1$

10) $x^{\lg x + 1} = 100$

11) $x^{\log_2 x + 4} = 32$

12) $2^{\log_2^2 x} + x^{\log_2 x} = 4$

13) $3^{\log_3^2 x} + x^{\log_3 x} = 162$

14) $x^{\log_4 x} = x \cdot 16^{\log_4 x}$

15) $x^{\log_3 x} = 9x^{-1}$

16) $(8x)^{\log_2 x - 3} = 32\sqrt{x}$

17) $2^{\log_2^2 x} + x^{\log_2 x} = 32$

ОТВЕТЫ

1) 0,1; 1000 2) 10; 100 3) $\frac{1}{25}$; 25 4) 10^{-5}; 10^3

5) 10^{-4}; 10 6) $\frac{1}{3}$; 9 7) $2\sqrt[3]{2}$ 8) $\frac{1}{10}$; 100

9) $\sqrt[4]{0,1}$; 10 10) 0,01; 10 11) $\frac{1}{32}$; 2 12) $\frac{1}{2}$; 2

13) $\frac{1}{9}$; 9 14) 1; 64 15) $\frac{1}{9}$; 3 16) $\frac{\sqrt{2}}{16}$; 16

17) $\frac{1}{4}$; 4

<u>БЛОК 7</u>. Решите уравнения различными способами:

С

1) $\left(\frac{9}{4}\right)^{\frac{\log_3 x\cdot\log_2 x}{\log_3 x-\log_2 x}}=4$

2) $6^{\lg x}=72-x^{\lg 6}$

3) $\lg x+\frac{1}{2}\lg x+\frac{1}{4}\lg x+\frac{1}{8}\lg x+...=2$

4) $x^{\lg\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{8}+...\right)}=1$

5) $\log_{1-x}(3-x)=\log_{3-x}(1-x)$

6) $3\log_x 4+2\log_{4x}4+3\log_{16x}4=0$

7) $\log_{x+1}\left(x^3+8-9x\right)\cdot\log_{x-1}(x+1)=3$

8) $\log_x 9x^2\cdot\log_3^2 x=4$

9) $4^{\lg x+1}-6^{\lg x}-3\cdot3^{\lg x^2}=0$

10) $\log_5\left(5^{\frac{1}{x}}+125\right)=\log_5 6+1+\frac{1}{2x}$

11) $\lg\lg x+\lg\left(\lg x^3-2\right)=0$

12) $|x-3|\cdot\lg x=2(x-3)$

ОТВЕТЫ

1) $\frac{1}{2}$	**2)** 100	**3)** 10	**4)** $x\in\mathbb{R},\ \ x\neq 0$
5) $2-\sqrt{2}$	**6)** $\frac{1}{8};\ \frac{1}{2}$	**7)** 3	**8)** $\frac{1}{9};\ 3$
9) 1	**10)** $\frac{1}{4};\ \frac{1}{2}$	**11)** 10	**12)** 0,01; 3; 100

§ 5. РЕШЕНИЕ ЛОГАРИФМИЧЕСКИХ НЕРАВЕНСТВ

БЛОК 1. Решите неравенства методом перехода к равносильной системе неравенств:

А

1) $\log_{0,4}\left(x^2-7x\right)\geq\log_{0,4}(3x+11)$

2) $\lg\frac{x+3}{x+4}>\lg\frac{x+5}{x+2}$

3) $\lg\left(2x^2+4x+10\right)>\lg\left(x^2-4x+3\right)$

4) $\log_2\frac{4}{x+3}>\log_2(2-x)$

5) $3^{\log_2\left(\frac{x-1}{x+2}\right)}<\frac{1}{9}$

6) $\log_{0,5}\left(x^2-5x+6\right)>-1$

7) $\log_{\sin\frac{\pi}{3}}\left(x^2-3x+2\right)\geq 2$

8) $\log_{0,(3)}\frac{2-3x}{x}\geq -1$

9) $\log_{\frac{1}{4}}\frac{x-3}{x+3}\geq\cos\frac{2\pi}{3}$

10) $\log_{\frac{1}{4}}(2x+3)>\log_9 27$

11) $2-\log_2\left(x^2+3x\right)\geq 0$

12) $3^{\log_2\left(x^2-3x+2\right)}\leq 3$

13) $4^{\log_4(4-9x)} < 16$

14) $\log_{\sqrt{10}}\left(2x^2 + x\right) < 2$

15) $\log_3\left(x^2 + 10x + 24\right) \le \log_3(6x + 36)$

16) $\log_{0,5}(x+5)^2 > \log_{\frac{1}{2}}(3x-1)^2$

17) $\lg\sqrt{x^2 - 3x + 4} - \lg\sqrt{x+1} > 0$

18) $\log_2(2x-1) < \log_{\frac{1}{\sqrt{2}}} 2$

19) $\log_3 x + \log_{\sqrt{3}} x + \log_{\frac{1}{3}} x < 6$

20) $\log_5\sqrt{x} - 2\log_{25} x > 2$

B

21) $\lg(x-2) + \lg(27-x) < 2$

22) $\log_{0,1}\left(x^2 + 75\right) - \log_{0,1}(x-4) \le -2$

23) $\log_{20} x + \log_{20}(x+1) \le \log_{20}(2x+6)$

24) $\log_5\left(20 + 5^x\right) > 3 - x$

25) $\log_{\frac{1}{2}} \log_3 \dfrac{x-4}{x-6} > 0$

26) $\log_2(x+2) < 1 - 3\log_8(x+1)$

27) $\log_{2x-3} x > 1$

28) $\log_{x^2}(3x+4)\geq 1$

29) $\log_{x-2}(2x-3)>\log_{x-2}(24-6x)$

30) $\log_{\frac{x-1}{x+5}} 0,3>0$

31) $\log_x \frac{x+3}{x-1}>1$

32) $\log_3 x+\log_3(x-1)-1\leq\log_3 2$

33) $\log_{0.5}\log_5(x^2-4)>\log_{0,5}1$

34) $\log_2(4^x-5\cdot 2^x+2)>2$

35) $\left(\frac{2}{5}\right)^{\log_{0,25}(x^2+5x+8)}\leq 2,5$

36) $\log_{0.5}\log_6\frac{x^2+x}{x+4}\leq 0$

37) $\log_{\frac{1}{2}}\log_8\frac{x^2-1}{x-2}\leq 0$

38) $\log_3|3-4x|>2$

39) $\log_7(x^2-6)\leq\log_7|x|$

40) $\log_2\left|1+\frac{1}{x}\right|>1$

41) $4-x<\log_2(6+2^x)$

42) $1-2\log_{\frac{1}{9}}(x+2)\ge\log_3(x-3)$

43) $\lg 10^{\lg(x^2+21)}>1+\lg x$

44) $\log_2\left(9^{x-1}+7\right)-2<\log_2\left(3^{x-1}+1\right)$

45) $\log_\pi(x+27)-\log_\pi(16-2x)<\log_\pi x$

46) $\log_7 x-\log_7(2x-5)\le\log_7 2-\log_7(x-3)$

47) $\left|3-\log_2 x\right|<2$

48) $\dfrac{\log_{0,5}\left(x^2-3\right)}{\lg 3}\le 0$

49) $\log_{0,5}\left(x^2-1\right)\cdot\lg 0,5\le 0$

50) $\log_x\dfrac{4x+5}{6-5x}<-1$

ОТВЕТЫ

1) $[-1;0)\cup(7;11]$

2) $(-\infty;-5)$

3) $(-\infty;-7)\cup(-1;1)\cup(3;\infty)$

4) $(-3;-2)\cup(1;2)$

5) $(1;2)$

6) $(1;2)\cup(3;4)$

7) $\left[\dfrac{1}{2};1\right)\cup\left(2;\dfrac{5}{2}\right]$

8) $\left[\dfrac{1}{3};\dfrac{2}{3}\right)$

9) $(-\infty;-9]\cup(3;\infty)$

10) $\left(-\dfrac{3}{2};-\dfrac{23}{16}\right)$

11) $[-4;-3)\cup(0;1]$

12) $[0;1)\cup(2;3]$

13) $\left(-\frac{4}{3};\frac{4}{9}\right)$

14) $\left(-\frac{5}{2};-\frac{1}{2}\right)\cup(0;2)$

15) $(-4;2]$

16) $(-\infty;-5)\cup(-5;-1)\cup(3;\infty)$

17) $(-1;1)\cup(3;\infty)$

18) $\left(\frac{1}{2};\frac{5}{8}\right)$

19) $(0;27)$

20) $\left(0;\frac{1}{625}\right)$

21) $(2;7)\cup(22;27)$

22) $(4;5]\cup[95;\infty)$

23) $(0;3]$

24) $(1;\infty)$

25) $(7;\infty)$

26) $(-1;0)$

27) $(2;3)$

28) $(1;4]$

29) $(2;3)\cup\left(\frac{27}{8};4\right)$

30) $(1;\infty)$

31) $(1;3)$

32) $(1;3]$

33) $\left(-3;-\sqrt{5}\right)\cup\left(\sqrt{5};3\right)$

34) $x>\log_2\left(5+\sqrt{33}\right)-1$

35) $[-4;-1]$

36) $(-4;-3]\cup[8;\infty)$

37) $(2;3]\cup[5;\infty)$

38) $\left(-\infty;-\frac{3}{2}\right)\cup(3;\infty)$

39) $\left[-3;-\sqrt{6}\right)\cup\left(\sqrt{6};3\right]$

40) $\left(-\frac{1}{3};0\right)\cup(0;1)$

41) $(1;\infty)$

42) $(3;\infty)$

43) $(0;3)\cup(7;\infty)$

44) $(1;2)$

45) $\left(3;\frac{9}{2}\right)$

46) $(3;5]$

47) $(2;32)$

48) $(-\infty;-2]\cup[2;\infty)$

49) $\left[-\sqrt{2};-1\right)\cup\left(1;\sqrt{2}\right]$

50) $\left(\frac{1}{2};1\right)$

БЛОК 2. Решите неравенства методом введения новой переменной:

В

1) $\frac{1}{1+\lg x}+\frac{1}{1-\lg x}>2$

2) $\frac{1-\log_4 x}{1+\log_2 x}\le\frac{1}{2}$

3) $4\log_4^2 x-\log_4 x>3$

4) $\frac{2}{1+\lg x}\ge 1$

5) $\log_2^2(x-1)^2+5\log_{0,5}(x-1)>-1$

6) $\log_5(x+3)\ge\log_{x+3}625$

7) $\frac{\lg^2 x-4\lg x+5}{2\lg x-3}<1$

8) $\frac{\lg^2 x+\lg x-6}{\lg x}>0$

9) $\log_2 x - 2\log_x 2 + 1 \geq 0$

10) $\lg x + 6\log_x 10 \leq 5$

11) $\lg^2(-x) + \lg x^2 - 3 < 0$

12) $\log_{0,5}^2 x + \log_{0,5} x - 2 \leq 0$

13) $\left(\frac{x}{10}\right)^{\lg x - 2} < 100$

14) $\left(\frac{x}{4}\right)^{\log_2 x - 1} < 4$

15) $\frac{1}{\lg x} - \frac{1}{\lg x - 1} < 1$

16) $\log_2\left(2^x + 1\right) \cdot \log_{0,5}\left(2^{x+1} + 2\right) > -2$

17) $\log_2 x \leq \frac{2}{\log_2 x - 1}$

18) $\log_3(x+2) > \log_{x+2} 81$

19) $\left(\lg^2 x + 2\lg x\right)^2 > 9$

20) $\log_3^2 x - 6\log_3 x + 5 \geq 0$

21) $\frac{\lg^2 x - 3\lg x + 3}{\lg x - 1} < 1$

22) $\log_2 x - \log_x 32 \leq 4$

23) $\log_{\sqrt{10}} \sqrt{x^3} \cdot \lg 100x < 3\lg x$

24) $\log_{\frac{1}{3}} x > \log_x 3 - \frac{5}{2}$

25) $\frac{\log_2 x - 5}{1 - 2\log_x 2} \geq 2\log_2 x$

26) $\log_2\left(\log_{0,5}^2 x - \log_{0,5} x - 2\right) \geq 2$

27) $\log_3 x - \log_3^2 x \leq \frac{3}{2}\log_{\frac{1}{2\sqrt{2}}} 4$

ОТВЕТЫ

1) $\left(\frac{1}{10}; 1\right) \cup (1; 10)$

2) $\left(0; \frac{1}{2}\right) \cup \left[\sqrt{2}; \infty\right)$

3) $\left(0; \frac{\sqrt{2}}{4}\right) \cup (4; \infty)$

4) $\left(\frac{1}{10}; 10\right]$

5) $\left(1; 1 + \sqrt[4]{2}\right) \cup (3; \infty)$

6) $[-2{,}96; -2) \cup [22; \infty)$

7) $\left(0; 10\sqrt{10}\right) \cup (100; 10\,000)$

8) $(0{,}001; 1) \cup (100; \infty)$

9) $\left[\frac{1}{4}; 1\right) \cup [2; \infty)$

10) $(0; 1) \cup [100; 1\,000]$

11) $(-10; -0{,}001)$

12) $[0{,}5; 4]$

13) $(1; 1\,000)$

14) $(1; 8)$

15) $(0; 1) \cup (10; \infty)$

16) $(-\infty; 0)$

17) $\left(0; \frac{1}{2}\right] \cup (2; 4]$

18) $\left(-\frac{17}{9}; -1\right) \cup (7; \infty)$

19) $(0; 0{,}001) \cup (10; \infty)$

20) $(0; 3] \cup [243; \infty)$

21) $(0; 10)$

22) $\left(0; \frac{1}{2}\right] \cup (1; 32]$

23) $\left(\frac{1}{10}; 1\right)$

24) $(0; 1) \cup \left(\sqrt{3}; 9\right)$

25) $\left(0; \frac{1}{2}\right] \cup (1; 4)$

26) $\left(0; \frac{1}{8}\right] \cup [4; \infty)$

27) $\left(0; \frac{1}{3}\right] \cup [9; \infty)$

БЛОК 3. Решите неравенства методом интервалов:

В

1) $\dfrac{3 - \log_2\left(x^2 - 6x + 8\right)}{x - 3} > 0$

2) $\dfrac{3x^2 - 16x + 21}{\log_{0,3}\left(x^2 + 4\right)} < 0$

3) $(x-1) \cdot \log_2\left(x^2 - 4x + 3\right) < 0$

4) $\dfrac{x^2 (x-2)^2}{\log_{0,5}\left(x^2 + 1\right)} \geq 0$

5) $(4x - 1) \cdot \log_2 x \geq 0$

6) $\dfrac{\left(\log_{\sqrt{2}}(x-3)\right)^2}{x^2 - 4x - 5} \geq 0$

7) $\dfrac{\log^2_{2,5-x}(2,5+x)}{(x+3,5)(x-1)}\geq 0$

8) $(x^2-4)\cdot\log_{\frac{1}{2}}x>0$

9) $\dfrac{\log_2(3\cdot 2^{x-1}-1)}{x}\geq 0$

10) $\dfrac{\log_{0,3}|x-2|}{x^2-4x}<0$

11) $\dfrac{x^2-4}{\log_{\frac{1}{2}}(x^2-1)}<0$

12) $\dfrac{\log_{0,25}(5+x)}{\log_4(7-x)}>0$

13) $\dfrac{\log_{0,2}(9-x)}{\log_5(7+x)}<0$

14) $\dfrac{\log_{0,3}\left(\frac{10}{7}(\log_2 5-1)\right)}{(x-8)(2-x)}>0$

15) $\dfrac{\lg 7-\lg(8-x^2)}{\lg(x+3)}>0$

16) $\dfrac{4\log^2_2 x}{x^2-2}\geq 0$

17) $\frac{\sqrt{x-0,3}}{\log_2 x^2} \le 0$

18) $\frac{\log_5\left(x^2+3\right)}{4x^2-16x} < 0$

ОТВЕТЫ

1) $(-\infty; 0)\cup(4; 6)$

2) $\left(-\infty; \frac{7}{3}\right)\cup(3; \infty)$

3) $\left(-\infty; 2-\sqrt{2}\right)\cup\left(3; 2+\sqrt{2}\right)$

4) $x = 2$

5) $\left(0; \frac{1}{4}\right]\cup[1; \infty)$

6) $\{4\}\cup(5; \infty)$

7) $\{-1,5\}\cup(1; 1,5)\cup(1,5; 2,5)$

8) $(1; 2)$

9) $\left(\log_2 \frac{2}{3}; 0\right)\cup\left[\log_2 \frac{4}{3}; \infty\right)$

10) $(-\infty; 0)\cup(1; 2)\cup(2; 3)\cup(4; \infty)$

11) $(-\infty; -2)\cup\left(-\sqrt{2}; -1\right)\cup\left(1; \sqrt{2}\right)\cup(2; \infty)$

12) $(-5; -4)\cup(6; 7)$

13) $(-6; 8)$

14) $(-\infty; 2)\cup(8; \infty)$

15) $(-2; -1)\cup\left(1; \sqrt{8}\right)$

16) $\{1\}\cup\left(\sqrt{2}; \infty\right)$

17) $[0,3; 1)$

18) $(0; 4)$

БЛОК 4. Решите логарифмические неравенства:

С

1) $\left|\log_2 x^2 + 2\right| > \left|\log_2 x + 4\right|$

2) $\sqrt{2\log_{100} x} > \log_{10}\sqrt{x}$

3) $\sqrt{4 - x^2}\left(\log_3 \frac{x+1}{x} + 2\right) \le 0$

4) $\frac{\log_2 \cos x + 1}{2x^2 + 3} > 0$

5) $\frac{1 - \log_{0,5}(-x)}{\sqrt{2 - 6x}} < 0$

6) $\frac{\lg\left(x^2 - 6x + 8\right)}{\lg(x - 8)} < 1$

7) $\log_{0,5} \log_4 \frac{2x-1}{x+1} < 1$

8) $\frac{x-1}{\log_3\left(9 - 3^x\right) - 3} \ge 0$

9) $5^{\log_5^2 x} + x^{\log_5 x} < 10$

10) $x^{(\lg x)^2 - 3\lg x + 1} > 1\,000$

11) $x^{\log_2 x - 2} > \frac{x}{4}$

Решите системы логарифмических неравенств:

12) $\begin{cases} \left(\frac{1}{2}\right)^{-2x+1} > 32 \\ \log_4 (x-6)^2 \le 1 \end{cases}$

13) $\begin{cases} \log_3 (1-x)^2 \le 2 \\ 3^{2x-6} < \frac{1}{27} \end{cases}$

14) $\begin{cases} \log_2 \left(x^2 - 2x - 2\right) > 0 \\ 2^{2x^2+5x+2} > 1 \end{cases}$

15) $\begin{cases} \log_{0,5} \left(x^2 - 5x + 7\right) > 0 \\ \log_3 x + \log_{\sqrt{3}} x + \log_{\frac{1}{3}} x < 6 \end{cases}$

16) $\begin{cases} \log_4 (x+7) \ge \log_2 (x+1) \\ \log_2 (x-2) + \log_2 (x+2) \le \log_2 5 \end{cases}$

17) $\begin{cases} \log_{0,2} (x+2) - \log_5 x > \log_{0,2} 15 \\ |2x+1| < |x-3| \end{cases}$

18) $\begin{cases} \log_{\frac{1}{2}} (x-3) > -1 \\ \sin x > 0 \end{cases}$

19) $\begin{cases} \lg |x-2| < 2 \\ \left(\frac{1}{3}\right)^{x^2} < 27^x \end{cases}$

20) $\begin{cases} \lg^2 x + \lg 0,01x > 0 \\ \frac{1}{x} < 1\,000 \end{cases}$

21) $\begin{cases} \lg\left(x^2-3x-3\right)\ge 0 \\ \lg\left(x^2-15\right)<1 \end{cases}$

22) $\begin{cases} \dfrac{x^2+5}{x^2-16x+64}>0 \\ \lg\left(x-5\right)-2\lg 2<\lg\sqrt{x+7} \end{cases}$

23) $-1<\lg\dfrac{12-5x}{3}<1$

24) $\begin{cases} \dfrac{2^{4x+2}}{4^{x+1}}>1 \\ 1+\log_3\left(x-4\right)\le\log_3\left(x+21\right) \end{cases}$

ОТВЕТЫ

1) $\left(0;\dfrac{1}{4}\right)\cup\left(4;\infty\right)$

2) $\left(1;10^4\right)$

3) $\{-2\}\cup\left[-\dfrac{9}{8};-1\right)\cup\{2\}$

4) $\left(-\dfrac{\pi}{3}+2\pi k;\dfrac{\pi}{3}+2\pi k\right);\quad k\in\mathbb{Z}$

5) $\left(-\dfrac{1}{2};0\right)$

6) $(8;9)$

7) $(-\infty;-1)$

8) $(-\infty;1]$

9) $(0{,}2;5)$

10) $(1\,000;\infty)$

11) $(0;2)\cup(4;\infty)$

12) $[4;6)\cup(6;8]$

13) $[-2;1)\cup\left(1;\dfrac{3}{2}\right)$

14) $(-\infty;-2)\cup(3;\infty)$

15) $(2;3)$

16) $x\in\varnothing$

17) $\left(0; \frac{2}{3}\right)$

18) $(3; \pi)$

19) $(-98; -3) \cup (0; 2) \cup (2; 102)$

20) $\left(\frac{1}{1000}; \frac{1}{100}\right) \cup (10; \infty)$

21) $\left(-5; -\sqrt{15}\right) \cup [4; 5)$

22) $(5; 8) \cup (8; 29)$

23) $(-3,6; 2,34)$

24) $(4; 16,5]$

§ 6. РЕШЕНИЕ СИСТЕМ ПОКАЗАТЕЛЬНЫХ И ЛОГАРИФМИЧЕСКИХ УРАВНЕНИЙ

БЛОК 1. Решите системы показательных уравнений методом приведения к одному основанию:

А

1) $\begin{cases} 2^x \cdot 4^y = 16 \\ 5^{3x} - 5^{4y+7} = 0 \end{cases}$

2) $\begin{cases} 9^{x+y} = 729 \\ 3^{x-y-1} = 1 \end{cases}$

3) $\begin{cases} 3^{x+y} = 243 \\ 9^{x-y-1} = 1 \end{cases}$

4) $\begin{cases} 8^x = 10y \\ 2^x = 5y \end{cases}$

5) $\begin{cases} 3^{2x-1} \cdot 27^{x+y} = 3 \\ (5x-y)^2 = 36 \end{cases}$

6) $\begin{cases} (0,7)^{x-y} = \left(\dfrac{10}{7}\right)^{-2} \\ (2,3)^{x+y} = 5,29 \end{cases}$

7) $\begin{cases} \left(\dfrac{1}{2}\right)^{2x-y} = 128 \\ 7^{7x-y} = \dfrac{1}{49} \end{cases}$

8) $\begin{cases} \left(\dfrac{1}{3}\right)^{3x-y} = 243 \\ 2^{5x-y} = \dfrac{1}{8} \end{cases}$

9) $\begin{cases} 5^{x+2} \cdot 2^{y+1} = \dfrac{1}{8} \\ x - y = 2 \end{cases}$

10) $\begin{cases} 3^{x+3} \cdot 2^{y-2} = 3 \\ x - y = -4 \end{cases}$

11) $\begin{cases} 2^{x-y}=4^{y} \\ \dfrac{6}{x}+\dfrac{1}{5y}=1 \end{cases}$

12) $\begin{cases} (0,6)^{x-y}=\left(\dfrac{3}{5}\right)^{2} \\ (1,3)^{x+y}=1,69 \end{cases}$

13) $\begin{cases} 7^{x}-16y=0 \\ 4^{x}-49y=0 \end{cases}$

14) $\begin{cases} 4^{(x-y)^2}-1=3 \\ 5^{x+y}=125 \end{cases}$

15) $\begin{cases} 2^{x-y}=128 \\ \left(\dfrac{1}{2}\right)^{x-2y+1}=2^{-3} \end{cases}$

В

16) $\begin{cases} 3^{x}\cdot 5^{y}=75 \\ 3^{y}\cdot 5^{x}=45 \end{cases}$

17) $\begin{cases} 3^{x}\cdot 7^{y}=27\,783 \\ x+y=7 \end{cases}$

18) $\begin{cases} 2^{x}\cdot 3^{y}=12 \\ 2^{y}\cdot 3^{x}=18 \end{cases}$

19) $\begin{cases} 27^{x}=3^{7-y} \\ \dfrac{1}{x}+2=\dfrac{10}{y} \end{cases}$

20) $\begin{cases} 4^{\frac{x}{y}}=32\cdot 8^{\frac{y}{x}} \\ 3^{\frac{x}{y}}=3\cdot 9^{\frac{1-y}{y}} \end{cases}$

21) $\begin{cases} 2^{y}\cdot 2^{x}=\dfrac{1}{\sqrt{2}} \\ \dfrac{3^{y}}{3^{x-y}}=81 \end{cases}$

22) $\begin{cases} 2^x \cdot 3^y = 648 \\ 3^x \cdot 2^y = 432 \end{cases}$

23) $\begin{cases} 8 \cdot 2^y = 4^{1,5x-0,5} \\ 5^{2x} = \dfrac{1}{25} \cdot 5^y \end{cases}$

24) $\begin{cases} 2^{x-y} \cdot 2^{xy} = 8 \\ 9^y = 3^{4-x} \end{cases}$

25) $\begin{cases} 9^{xy} \cdot 3^{x^2+y^2} = 3 \\ \sqrt{25^{2x+y}} = \dfrac{5^x}{5^y} \end{cases}$

26) $\begin{cases} \dfrac{3^y}{27} = \left(\dfrac{1}{9}\right)^{0,5-x} \\ \left(\sqrt{2}\right)^{2x} = 2^{y-3,5} \end{cases}$

27) $\begin{cases} 2^x \cdot 3^y = 24 \\ 2^y \cdot 3^x = 54 \end{cases}$

28) $\begin{cases} 3^y \cdot \sqrt[x]{64} = 36 \\ 5^y \cdot \sqrt[x]{512} = 200 \end{cases}$

ОТВЕТЫ

1) $\left(3; \dfrac{1}{2}\right)$ 2) $(2; 1)$ 3) $(3; 2)$

4) $\left(\dfrac{1}{2}; \dfrac{\sqrt{2}}{5}\right)$ 5) $(1; -1)$; $(-0,8; 2)$ 6) $(2; 0)$

7) $(1; 9)$ 8) $(1; 8)$ 9) $(-2; -4)$

10) $(\ 2; 2)$ 11) $(6,6; 2,2)$ 12) $(2; 0)$

13) $\left(-2; \dfrac{1}{784}\right)$ 14) $(1; 2)$; $(2; 1)$ 15) $(12; 5)$

16) $(1;2)$ 17) $(4;3)$ 18) $(2;1)$

19) $(-1;10)$; $\left(\frac{7}{6};\frac{7}{2}\right)$ 20) $(-2;4)$; $\left(\frac{3}{2};\frac{1}{2}\right)$ 21) $\left(-\frac{5}{3};\frac{7}{6}\right)$

22) $(3;4)$ 23) $(6;14)$ 24) $(2;1)$; $(5;-0,5)$

25) $(2;-1)$; $(-2;1)$ 26) $\left(\frac{3}{2};5\right)$ 27) $(3;1)$

28) $(3;2)$

БЛОК 2. Решите системы показательных уравнений методом введения новых переменных:

А

1) $\begin{cases} 5^x \cdot 5^y = 3125 \\ 5^x + 5^y = 150 \end{cases}$

2) $\begin{cases} 3^x \cdot 7^y = 63 \\ 3^x + 7^y = 16 \end{cases}$

3) $\begin{cases} 2^x + 3^y = 17 \\ 2^{x+2} - 3^{y+1} = 5 \end{cases}$

4) $\begin{cases} 2 \cdot 7^x - 4 \cdot 6^y = 542 \\ 3 \cdot 7^x - 5 \cdot 6^y = 849 \end{cases}$

5) $\begin{cases} 2^x + 2^y = 5 \\ 2^{x+y} = 4 \end{cases}$

6) $\begin{cases} 5 \cdot 2^{x-1} - 2 \cdot 5^{y+1} = -\dfrac{75}{8} \\ 4^x + 5^y = \dfrac{17}{16} \end{cases}$

7) $\begin{cases} 3^x + 3^y = 28 \\ 3^{x+y} = 27 \end{cases}$

В

8) $\begin{cases} 3^{x}-2^{2y}=17 \\ 3^{\frac{x}{2}}+2^{y}=17 \end{cases}$

9) $\begin{cases} 7^{2x}+4^{2y+1}=85 \\ 7^{x}-4^{y}=5 \end{cases}$

10) $\begin{cases} 3^{x}-2^{2y}=23 \\ \sqrt{3^{2x}}-2^{y}=25 \end{cases}$

11) $\begin{cases} 3^{x}+2^{x+y+1}=5 \\ 3^{x+1}-2^{x+y}=1 \end{cases}$

12) $\begin{cases} 3\cdot 2^{x}-2^{x+y}=-2 \\ 5\cdot 2^{x+1}-2^{x+y-1}=16 \end{cases}$

13) $\begin{cases} 3^{x}+3^{y}=36 \\ 3^{2x-y}+3^{x}=12 \end{cases}$

14) $\begin{cases} 25^{2x}+25^{2y}=30 \\ 25^{x+y}=5\sqrt{5} \end{cases}$

15) $\begin{cases} 3^{x}-4^{y}=77 \\ \left(\sqrt{3}\right)^{x}-2^{y}=7 \end{cases}$

16) $\begin{cases} 3^{2x}-2^{y}=77 \\ 3^{x}-2^{\frac{y}{2}}=7 \end{cases}$

17) $\begin{cases} \left(\frac{3}{2}\right)^{x-y}-\left(\frac{2}{3}\right)^{x-y}=\frac{65}{36} \\ xy-x+y=118 \end{cases}$

18) $\begin{cases} 2x+2^{y}=-1 \\ -20x+3{,}5\cdot 2^{y+1}=146 \end{cases}$

19) $\begin{cases} 5^{2x}-2^{y}=561 \\ 5^{x}-2^{\frac{y}{2}}=17 \end{cases}$

20) $\begin{cases} 2^{\cos x}+4^{\sin y}=3 \\ 2^{\cos x}\cdot 4^{\sin y}=2 \end{cases}$

21) $\begin{cases} 3^{-x}-2^{y^{2}}=77 \\ \left(\frac{1}{3}\right)^{\frac{x}{2}}-2^{0{,}5y^{2}}=7 \end{cases}$

22) $\begin{cases} 64^{2x}+64^{2y}=12 \\ 64^{x+y}=4\sqrt{2} \end{cases}$

ОТВЕТЫ

1) $(2;3)$; $(3;2)$

2) $(\log_3 7; \log_7 9)$; $(2;1)$

3) $(3;2)$

4) $(3;2)$

5) $(0;2)$; $(2;0)$

6) $(-2;0)$

7) $(0;3)$; $(3;0)$

8) $(4;3)$

9) $\begin{cases} x = \log_7\left(\sqrt{13}+4\right) \\ y = \log_4\left(\sqrt{13}-1\right) \end{cases}$

10) $(3;1)$

11) $(0;1)$

12) $(1;2)$

13) $(2;3)$

14) $\left(\frac{1}{4};\frac{1}{2}\right)$; $\left(\frac{1}{2};\frac{1}{4}\right)$

15) $(4;1)$

16) $(2;2)$

17) $(-10;-12)$; $(12;10)$

18) $(-4,5;3)$

19) $(2;6)$

20) $(2\pi k; \pi n)$; $\left(\frac{\pi}{2}+\pi k;\ (-1)^n\frac{\pi}{6}+\pi n\right)$

21) $\left(-4;\sqrt{2}\right)$; $\left(-4;-\sqrt{2}\right)$

22) $\left(\frac{1}{4};\frac{1}{6}\right)$; $\left(\frac{1}{6};\frac{1}{4}\right)$

***В ответах параметры** $k, n \in \mathbb{Z}$

БЛОК 3. Решите системы логарифмических уравнений методом потенцирования:

В

1) $\begin{cases} \lg x - \lg y = \lg 1{,}6 \\ 5x + 2y = 100 \end{cases}$

2) $\begin{cases} \lg x - \lg y = \lg 15 - 1 \\ 3x + 2y = 39 \end{cases}$

3) $\begin{cases} \lg\left(x^2 + y^2\right) = 1 + \lg 13 \\ \lg\left(x + y\right) - \lg\left(x - y\right) = 3\lg 2 \end{cases}$

4) $\begin{cases} x^2 + y^2 = 425 \\ \lg x + \lg y = 2 \end{cases}$

5) $\begin{cases} \log_{\frac{1}{2}}\left(y - x\right) + \log_2\left(\frac{1}{y}\right) = -2 \\ x^2 + y^2 = 25 \end{cases}$

6) $\begin{cases} \log_5 x + \log_5 y = 2 + 2\log_5 4 \\ \log_{81}\left(y - x\right) = 0{,}5 \end{cases}$

7) $\begin{cases} \log_4 x + \log_4 y = 1 + \log_4 9 \\ x + y - 20 = 0 \end{cases}$

8) $\begin{cases} \log_2\left(x^2 + y^2\right) = 5 \\ 2\log_4 x + \log_2 y = 4 \end{cases}$

9) $\begin{cases} \lg^2 x - \lg^2 y = 1 \\ \log_2 x - \log_2 y = 1 + \log_2 5 \end{cases}$

10) $\begin{cases} 3^{1+\log_3(x+v)} = 15 \\ \log_5(x+y) + \log_5(x-y) = 1 \end{cases}$

11) $\begin{cases} \log_3(x+2y) + \log_{\frac{1}{3}}(x-2y) = 1 \\ x^2 + y^2 = 4 + \dfrac{y}{2} \end{cases}$

12) $\begin{cases} \log_2 \log_3(x+y) = 1 \\ \lg x + \lg y = 3\lg 2 \end{cases}$

13) $\begin{cases} \dfrac{1}{x} - \dfrac{1}{y} = \dfrac{2}{15} \\ \log_3 x + \log_3 y = 1 + \log_3 5 \end{cases}$

14) $\begin{cases} \log_2 x + \log_2 y = 2 + \log_2 5 \\ \log_{0,5}(x-y) = 0 \end{cases}$

15) $\begin{cases} \log_2 x + \log_4 y = \dfrac{3}{2} \\ \log_{16} x + \log_4 y = \dfrac{3}{2} \end{cases}$

16) $\begin{cases} 2 + \log_2(x+y) = \log_2 8 \\ x^2 - y^2 = 16 \end{cases}$

17) $\begin{cases} 10^{1+\lg(x+y)} = 40 \\ \lg(x-y) + \lg(x+y) = 3\lg 2 \end{cases}$

18) $\begin{cases} \log_4 x - \log_2 y = 0 \\ x^2 - 5y^2 + 4 = 0 \end{cases}$

19) $\begin{cases} \lg(x+y) + \lg(x-y) = 1 + 2\lg 2 \\ 10^{\lg(x-y)+1} = 40 \end{cases}$

20) $\begin{cases} \log_3 x^2 = 2 \\ \log_3 x - \log_3 y = 1 \end{cases}$

ОТВЕТЫ

1) $(16; 10)$

2) $(9; 6)$

3) $(9; 7)$

4) $(5; 20)$; $(20; 5)$

5) $\left(-\frac{7\sqrt{2}}{2}; \frac{\sqrt{2}}{2}\right)$; $(3; 4)$

6) $(16; 25)$

7) $(2; 18)$; $(18; 2)$

8) $(4; 4)$

9) $(10; 1)$

10) $(3; 2)$

11) $\left(2; \frac{1}{2}\right)$

12) $(1; 8)$; $(8; 1)$

13) $(3; 5)$

14) $(5; 4)$

15) $(1; 8)$

16) $(5; -3)$

17) $(3; 1)$

18) $(1; 1)$; $(4; 2)$

19) $(7; 3)$

20) $(3; 1)$

БЛОК 4. Решите системы логарифмических уравнений методом введения новых переменных:

В

1) $\begin{cases} \log_x y - \log_y x = \dfrac{3}{2} \\ x + y = 0,75 \end{cases}$

2) $\begin{cases} x\,y = 30 \\ x^{\lg y} = 3 \end{cases}$

3) $\begin{cases} \log_x y + \log_y x = 2 \\ x^2 + y = 12 \end{cases}$

4) $\begin{cases} \log_y x + \log_x y = \dfrac{26}{5} \\ x\,y = 64 \end{cases}$

5) $\begin{cases} x^{\log_5 y} = 64 \\ x\,y = 500 \end{cases}$

6) $\begin{cases} x^y = \dfrac{1}{\sqrt{1\,000}} \\ \dfrac{1}{y} \cdot \lg x = -6 \end{cases}$

7) $\begin{cases} x^{\lg y} = 2 \\ x\,y = 20 \end{cases}$

8) $\begin{cases} \log_x y + \log_y x = 2,5 \\ 4\sqrt{x} - 3\sqrt{y} = 1 \end{cases}$

9) $\begin{cases} \log_x y + 4\log_y x = 4 \\ x^2 + 3y = 8 \end{cases}$

10) $\begin{cases} \lg x \cdot \lg(x\,y) = 2 \\ \lg\left(\dfrac{x}{y}\right) = 3 \end{cases}$

11) $\begin{cases} \log_y x - 2\log_x y = 1 \\ x^2 + 2y^2 = 3 \end{cases}$

ОТВЕТЫ

1) $\left(\dfrac{1}{2}; \dfrac{1}{4}\right)$

2) $(3; 10)$; $(10; 3)$

3) $(3;3)$

4) $(2;32)$; $(32;2)$

5) $(4;125)$; $(125;4)$

6) $\left(0{,}001;\frac{1}{2}\right)$; $\left(1000;-\frac{1}{2}\right)$

7) $(2;10)$; $(10;2)$

8) $\left(\frac{1}{9};\frac{1}{81}\right)$

9) $\left(\sqrt{2};2\right)$

10) $(100;0{,}1)$; $\left(\frac{1}{\sqrt{10}};\frac{1}{\sqrt{10^7}}\right)$

11) $\left(\sqrt{2};\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$

БЛОК 5. Решите системы показательных и логарифмических уравнений:

В

1) $\begin{cases} 3^x \cdot 2^y = 576 \\ \log_{\sqrt{2}}(y-x) = 4 \end{cases}$

2) $\begin{cases} 2^{\frac{x-y}{2}} - 2^{\frac{x-y}{4}} = 12 \\ 3^{\lg(2y-x)} = 1 \end{cases}$

3) $\begin{cases} 3^{\log_3 y} - \log_3 x = 1 \\ x^y = 3^{12} \end{cases}$

4) $\begin{cases} \log_{11}(y-3x) = 1 \\ \sqrt[4]{2^{3y-2x}} = 8 \end{cases}$

5) $\begin{cases} 5^{\log_6(x-4y)} = 1 \\ 4^{x-2y} - 7 \cdot 2^{x-2y} = 8 \end{cases}$

6) $\begin{cases} 3^{x}\cdot 2^{y}=1152 \\ \log_{\sqrt{5}}(y-x)=2 \end{cases}$

7) $\begin{cases} \log_3 x-2^{y}+y=3 \\ y\cdot 2^{y}+2^{y}\cdot\log_3 x=4 \end{cases}$

8) $\begin{cases} 2^{x}\cdot 4^{y}=32 \\ \lg(x-y)^2=2\lg 2 \end{cases}$

9) $\begin{cases} 4^{x-y}=16 \\ \log_5(\log_3 x+\log_3 y)=0 \end{cases}$

10) $\begin{cases} 4^{1+\log_4(x+y)}=12 \\ \log_{\frac{1}{3}}(x+y)+\log_{\frac{1}{3}}(x-y)=-1 \end{cases}$

11) $\begin{cases} \log_{\sqrt{2}}(x+y)=2 \\ 3^{6-x}\cdot 4^{y+3}=36 \end{cases}$

12) $\begin{cases} \log_2(x-y)=1 \\ 2^{x}\cdot 3^{y+1}=72 \end{cases}$

13) $\begin{cases} \left(\sqrt{3}\right)^{x-y}=\left(\frac{1}{3}\right)^{x-2y} \\ \log_2(x+y)+\log_2(x-y)=4 \end{cases}$

14) $\begin{cases} 2^{\log_{\sqrt{2}} x}=y^4 \\ \log_2 x-\log_2 y=1 \end{cases}$

15) $\begin{cases} \log_3(x-y)=\log_3 2 \\ 2^x \cdot 4^y = 32 \end{cases}$

16) $\begin{cases} \log_3(x+y)=0 \\ 3^y \cdot \left(\dfrac{1}{7}\right)^x = 63 \end{cases}$

17) $\begin{cases} 2x+3^y=10 \\ y=\log_3(18x) \end{cases}$

18) $\begin{cases} \log_2(4x-y)=-1 \\ 9^{2x+2} \cdot 3^{2y}=1 \end{cases}$

19) $\begin{cases} 3^y+x=10 \\ y-\log_3 x=2 \end{cases}$

20) $\begin{cases} 5^x \cdot 2^y = 3200 \\ \log_{\sqrt{5}}(y-x)=2 \end{cases}$

21) $\begin{cases} 2^x \cdot 8^{-y} = 2\sqrt{2} \\ \log_9 \dfrac{1}{x} + 0,5 = \dfrac{1}{2}\log_3 9y \end{cases}$

22) $\begin{cases} \log_3 x + \log_3 y = 1 \\ 3^{x-y} = \left(\dfrac{1}{27}\right)^{-\frac{2}{3}} \end{cases}$

ОТВЕТЫ

1) $(2;6)$ 2) $(17;9)$ 3) $(27;4)$

4) $(-3;2)$ 5) $(5;1)$ 6) $(2;7)$

7) $(81;0)$ 8) $\left(\frac{1}{3};\frac{7}{3}\right)$; $(3;1)$ 9) $(3;1)$

10) $(2;1)$ 11) $(4;-2)$ 12) $(3;1)$

13) $(5;3)$ 14) $(4;2)$ 15) $(3;1)$

16) $(-1;2)$ 17) $\left(\frac{1}{2};2\right)$ 18) $\left(-\frac{1}{4};-1{,}5\right)$

19) $(1;2)$ 20) $(2;7)$ 21) $\left(2;\frac{1}{6}\right)$

22) $(3;1)$

БЛОК 6. Решите системы показательных уравнений различными методами:

С

1) $\begin{cases} x^{y} = 243 \\ \sqrt[y]{1\,024} = \left(\frac{2}{3}x\right)^{2} \end{cases}$

2) $\begin{cases} \sqrt[x]{x+y} = 2 \\ (x+y)\cdot 5^{x} = 100 \end{cases}$

3) $\begin{cases} \sqrt{5^{x}}\cdot\sqrt[3]{5^{y}} = 125 \\ \sqrt[4]{11^{x}}\cdot\sqrt{4^{y}} = 88 \end{cases}$

4) $\begin{cases} \sqrt[x-y]{x+y} = 2\sqrt{3} \\ (x+y)\cdot 2^{y-x} = 3 \end{cases}$

5) $\begin{cases} 2^{\frac{x+y}{3}} + 2^{\frac{x+y}{6}} = 6 \\ x^2 + 5y^2 = 6xy \end{cases}$

6) $\begin{cases} 3^{\frac{x-y}{4}} + 3^{\frac{x-y}{2}} = 12 \\ x^2 - 5y^2 = 4xy \end{cases}$

7) $\begin{cases} x^y = 256 \\ 2 \cdot \sqrt[y]{81^2} = 3x \end{cases}$

8) $\begin{cases} \sqrt[x]{27} \cdot \sqrt[y]{625} = 15 \\ 7x + 5y = 41 \end{cases}$

ОТВЕТЫ

1) $(3; 5)$

2) $(2; 2)$

3) $(4; 3)$

4) $(7; 5)$

5) $(3; 3)$; $(5; 1)$

6) $(2; -2)$; $(5; 1)$

7) $(2; 8)$

8) $(3; 4)$

ГЛАВА IV. ТРИГОНОМЕТРИЧЕСКИЕ ФУНКЦИИ

§1. ТРИГОНОМЕТРИЧЕСКИЕ ПРЕОБРАЗОВАНИЯ

БЛОК 1. Упростите, используя формулы приведения:

А

1) $\sin^2(270°-\alpha)+\sin^2(360°-\alpha)$

2) $\dfrac{\cos 2\alpha+\cos\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right)\cdot\sin\alpha}{\sin\left(\frac{\pi}{2}+\alpha\right)}$

3) $\dfrac{1-\sin^2(270°+\alpha)}{1-\sin^2(180°+\alpha)}$

4) $\dfrac{\sin 2\alpha}{1-\sin\left(\frac{\pi}{2}-2\alpha\right)}$

5) $\dfrac{\cos^2(180°-\alpha)}{1-\cos(270°-\alpha)}$

6) $\dfrac{\sin(\pi-2\alpha)}{1+\cos 2\alpha}$

7) $\dfrac{\cos^2(270°-\alpha)}{1-\cos(180°+\alpha)}$

8) $\dfrac{\cos(-\alpha)\cdot\cos(180°+\alpha)}{\sin(-\alpha)\cdot\sin(90°+\alpha)}$

9) $2\cos\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right)\cdot\sin\left(\frac{\pi}{2}+\alpha\right)\cdot\operatorname{tg}(\pi-\alpha)$

В

10) $\dfrac{\sin 135°\cdot\cos 210°\cdot\operatorname{tg} 240°}{\operatorname{ctg} 300°}$

11) $\sin(90°+\alpha)\cdot\sin(270°-\alpha)+\cos(\alpha-90°)\cdot\sin(\alpha-180°)$

12) $\dfrac{\sin\left(\frac{3\pi}{2}-\alpha\right)\cdot\cos(\pi+\alpha)\cdot\operatorname{ctg}\left(\frac{3\pi}{2}+\alpha\right)}{\operatorname{tg}(2\pi-\alpha)}$

13) $\dfrac{\mathrm{tg}(2\pi-\alpha)\cdot\cos(\pi-\alpha)}{\mathrm{tg}\left(\dfrac{3\pi}{2}+\alpha\right)\cdot\cos\left(\dfrac{3\pi}{2}+\alpha\right)}$

14) $\dfrac{\sin(\pi-\alpha)\cdot\cos\left(\dfrac{3\pi}{2}-\alpha\right)\cdot\mathrm{ctg}\left(\dfrac{\pi}{2}+\alpha\right)}{\mathrm{tg}(2\pi-\alpha)}$

15) $8\sin 105°\cdot\sin 15° - 3\,\mathrm{tg}\,209°\cdot\mathrm{tg}\,299° + 2$

16) $\sin\left(\dfrac{7\pi}{2}-2\alpha\right)\cdot\cos(3\pi-\alpha)\cdot\sin\alpha$; $\quad\alpha=\dfrac{3\pi}{16}$

17) $\dfrac{\sin(\pi-\alpha)\cdot\mathrm{tg}\left(\alpha-\dfrac{\pi}{2}\right)}{\cos\left(\dfrac{3\pi}{2}+\alpha\right)\cdot\mathrm{ctg}(\pi-\alpha)}$

18) $\sin 225° - \cos 495° - \mathrm{tg}\,330° - \mathrm{ctg}\,600°$

19) $\dfrac{\sin(\pi-\alpha)\cdot\mathrm{ctg}\left(\dfrac{3\pi}{2}+\alpha\right)}{\mathrm{tg}(2\pi-\alpha)\cdot\cos\left(\dfrac{\pi}{2}+\alpha\right)}$

20) $\cos 3\pi\cdot\cos\dfrac{10\pi}{3}\cdot\cos\dfrac{13\pi}{3}$

21) $\dfrac{\sin^3(\alpha-270°)\cdot\cos(\alpha-360°)}{\mathrm{tg}^3(\alpha-90°)\cdot\cos^3(\alpha-270°)}$

22) $\dfrac{\cos^2(270°+\alpha)}{\mathrm{tg}^2(\alpha-360°)}+\dfrac{\cos^2(-\alpha)}{\mathrm{tg}^2(\alpha-270°)}$

23) $\sin(180°-\alpha)-\dfrac{\cos^2(180°+\alpha)}{\cos(270°-\alpha)}$

24) $\sin(90°+\alpha)-\dfrac{\cos^2(\alpha-90°)}{\sin(\alpha+270°)}$

25) $2\sin 1320°\cdot\operatorname{ctg}(-780°)-3\cos(-900°)$

26) $\dfrac{\sin\left(\dfrac{13\pi}{2}-\alpha\right)-\operatorname{ctg}(6\pi+\alpha)}{1+\sin(2\pi-\alpha)}$

27) $\sin\left(\alpha-\dfrac{\pi}{2}\right)\cdot\cos\alpha-\sin^2(\pi-\alpha)\cdot\sin^2\alpha-\cos^2(\pi-\alpha)\cdot\cos^2\left(\dfrac{3\pi}{2}+\alpha\right)$

28) $2\sin\left(\alpha-\dfrac{5\pi}{2}\right)\cdot\sin(\alpha-9\pi)-\sin(3\pi-2\alpha)$

29) $\dfrac{\sin(-\alpha)}{\cos\left(\dfrac{\pi}{2}+\alpha\right)}-\dfrac{\operatorname{ctg}\left(\dfrac{\pi}{2}-\alpha\right)}{\operatorname{ctg}\left(\dfrac{3\pi}{2}+\alpha\right)}$

30) $\dfrac{\sin(0,5\pi+\alpha)+\cos(\pi-3\alpha)}{1-\cos(-2\alpha)}$

ОТВЕТЫ

1) 1	2) $\cos\alpha$	3) $\operatorname{tg}^2\alpha$	4) $\operatorname{ctg}\alpha$
5) $1-\sin\alpha$	6) $\operatorname{tg}\alpha$	7) $1-\cos\alpha$	8) $\operatorname{ctg}\alpha$
9) $-2\sin^2\alpha$	10) $\dfrac{3\sqrt{6}}{4}$	11) -1	12) $\cos^2\alpha$
13) $-\operatorname{tg}\alpha$	14) $-\sin^2\alpha$	15) 7	16) $\dfrac{\sqrt{2}}{8}$
17) 1	18) 0	19) -1	20) $\dfrac{1}{4}$

21) $\cos\alpha$

22) 1

23) $\dfrac{1}{\sin\alpha}$

24) $\dfrac{1}{\cos\alpha}$

25) 4

26) $-\operatorname{ctg}\alpha$

27) -1

28) 0

29) 2

30) $2\cos\alpha$

Б ЛОК 2. Упростите:

А

1) $\dfrac{\sin(-\alpha)\cdot\operatorname{tg}(-\alpha)}{\cos(-\alpha)\cdot\operatorname{ctg}(-\alpha)}$

2) $\left(1+\operatorname{tg}^2\alpha+\dfrac{1}{\sin^2\alpha}\right)\cdot\sin^2\alpha\cdot\cos^2\alpha$

3) $\dfrac{\sin\alpha}{1-\cos\alpha}+\dfrac{1-\cos\alpha}{\sin\alpha}$

4) $\cos^2\alpha\cdot\left(1+\operatorname{tg}^2\alpha\right)-\sin^2\alpha$

5) $\dfrac{2\sin^2\alpha-1}{\sin\alpha+\cos\alpha}$

6) $\dfrac{\cos^2\alpha-\sin^2\alpha}{\cos\alpha-\sin\alpha}-\operatorname{tg}\alpha\cdot\cos\alpha$

7) $\dfrac{(\cos\alpha+\sin\alpha)^2-1}{\operatorname{ctg}\alpha-\sin\alpha\cdot\cos\alpha}$

8) $\dfrac{2\sin\alpha-\sin2\alpha}{2\sin\alpha+\sin2\alpha}$

9) $\sin^2\alpha+\sin^2\alpha\cdot\cos^2\alpha+\cos^4\alpha$

10) $\sin^2\alpha\cdot(1+\operatorname{ctg}\alpha)+\cos^2\alpha\cdot(1+\operatorname{tg}\alpha)$

11) $\cos^4 2\alpha-\sin^4 2\alpha$

12) $(\operatorname{ctg}\alpha + \operatorname{tg}\alpha)^2 - (\operatorname{ctg}\alpha - \operatorname{tg}\alpha)^2$

13) $\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{4} + \alpha\right) \cdot \operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{4} - \alpha\right)$

14) $(1 + \cos 2\alpha) \cdot \operatorname{tg}\alpha$

15) $(\sin 2\alpha + 3\cos 2\alpha)^2 + (\cos 2\alpha - 3\sin 2\alpha)^2$

16) $\sin^4\alpha + \cos^2\alpha - \cos^4\alpha$

17) $\operatorname{tg}\alpha - \frac{1 - 2\cos^2\alpha}{\sin\alpha \cdot \cos\alpha}$

18) $2\cos^2\frac{\alpha}{2} - \cos\alpha$

19) $\frac{\sin 2\alpha + \sin 10\alpha}{\cos 2\alpha + \cos 10\alpha} \cdot \operatorname{ctg} 6\alpha$

20) $\frac{1 + \operatorname{tg} 2\alpha + \operatorname{tg}^2 2\alpha}{1 + \operatorname{ctg} 2\alpha + \operatorname{ctg}^2 2\alpha}$

21) $\frac{1 + \cos\alpha}{1 - \cos\alpha} \cdot \operatorname{tg}^2\frac{\alpha}{2} - \cos^2\alpha$

22) $\frac{1 + \operatorname{tg}^4 2\alpha}{\operatorname{tg}^2 2\alpha + \operatorname{ctg}^2 2\alpha} - \frac{1}{\cos^2 2\alpha}$

B

23) $\frac{\sin\alpha + \sin 3\alpha}{\cos\alpha + \cos 3\alpha}$

24) $\frac{\operatorname{ctg}^2 2\alpha - 1}{2\operatorname{ctg} 2\alpha} - \cos 8\alpha \cdot \operatorname{ctg} 4\alpha$

25) $\frac{\sin^4\alpha - \cos^4\alpha + \cos^2\alpha}{2(1 - \cos\alpha)}$

26) $\dfrac{1-\cos 2\alpha+\sin 2\alpha}{1+\cos 2\alpha+\sin 2\alpha}$

27) $\dfrac{2}{\sin 4\alpha}-\operatorname{ctg} 2\alpha$

28) $\dfrac{\operatorname{tg}\alpha}{1+\operatorname{tg}^2\alpha}+\dfrac{\operatorname{ctg}\alpha}{1+\operatorname{ctg}^2\alpha}$

29) $4\sin\alpha\cdot\cos^3\alpha-2\sin 2\alpha\cdot\sin^2\alpha$

30) $\dfrac{\sin 2\alpha}{\cos\alpha}+\dfrac{\cos 2\alpha}{\sin\alpha}$

31) $\cos\alpha\cdot\left(1+\cos^{-1}\alpha+\operatorname{tg}\alpha\right)\left(1-\cos^{-1}\alpha+\operatorname{tg}\alpha\right)$

32) $\left(1+\dfrac{1}{\operatorname{tg}^2\left(\dfrac{\pi}{2}+\alpha\right)}\right)\cdot\sin^2\alpha$

33) $\left(\sin\alpha+\dfrac{1}{\sin\alpha}\right)^2+\left(\cos\alpha+\dfrac{1}{\cos\alpha}\right)^2-\operatorname{tg}^2\alpha-\operatorname{ctg}^2\alpha$

34) $\sin\left(\dfrac{\pi}{4}-\alpha\right)\cdot\sin\left(\dfrac{\pi}{4}+\alpha\right)-\cos\left(\dfrac{\pi}{4}+\alpha\right)\cdot\cos\left(\dfrac{\pi}{4}-\alpha\right)$

35) $\sqrt{(1-\cos\alpha\cdot\cos\beta)^2-\sin^2\alpha\cdot\sin^2\beta}$

36) $\sin^{-1}\alpha+\operatorname{tg}^{-1}\alpha$

37) $(\sin\alpha+\sin\beta)^2+(\cos\alpha+\cos\beta)^2$

38) $\dfrac{\sin^2\alpha}{\sin\alpha-\cos\alpha}+\dfrac{\sin\alpha+\cos\alpha}{1-\operatorname{tg}^2\alpha}-\sin\alpha$

39) $\dfrac{\operatorname{tg}2\alpha\cdot\operatorname{tg}\alpha}{\operatorname{tg}2\alpha-\operatorname{tg}\alpha}$

40) $\dfrac{\sin(0{,}5\pi+3\alpha)-\cos(-5\alpha)}{4\sin\alpha\cdot\cos 2\alpha}$

41) $\dfrac{\sin^2(\beta-45°)-\cos^2(\beta-45°)}{\sin 2\beta}$

42) $\dfrac{\sin 6\alpha}{\sin 2\alpha}+\dfrac{\cos(6\alpha-\pi)}{\cos 2\alpha}$

43) $\dfrac{\operatorname{tg}(\alpha+\beta)-\operatorname{tg}\alpha-\operatorname{tg}\beta}{\operatorname{tg}\alpha\cdot\operatorname{tg}(\alpha+\beta)}\cdot\operatorname{ctg}\beta$

44) $\operatorname{tg}\left(\dfrac{\pi}{4}+\dfrac{\alpha}{2}\right)\cdot\dfrac{1-\sin\alpha}{\cos\alpha}$

45) $\cos 4\alpha-\dfrac{\sin 4\alpha}{\operatorname{tg} 2\alpha}-\cos 2\alpha+2\cos^2\alpha$

46) $\dfrac{1-2\sin^2\alpha}{1+\sin 2\alpha}-\dfrac{1-\operatorname{tg}\alpha}{1+\operatorname{tg}\alpha}$

47) $\dfrac{1-\sin^4\alpha-\cos^4\alpha}{\cos^4\alpha}-2\operatorname{tg}^2\alpha$

48) $\dfrac{\sqrt{2}\cos\alpha-2\sin(45°-\alpha)}{2\sin(60°+\alpha)-\sqrt{3}\cos\alpha}$

49) $\dfrac{1-\cos\alpha+\cos 2\alpha}{\sin\alpha-\sin 2\alpha}$

50) $\dfrac{\cos\alpha-2\sin 3\alpha-\cos 5\alpha}{\sin 5\alpha-2\cos 3\alpha-\sin\alpha}$

51) $\cos\left(\dfrac{\pi}{3}-2\alpha\right)\cdot\sin\left(\dfrac{\pi}{6}-2\alpha\right)+\sin^2 2\alpha$

ОТВЕТЫ

1) $-\operatorname{tg}^3\alpha$	2) 1	3) $\dfrac{2}{\sin\alpha}$
4) $\cos^2\alpha$	5) $\sin\alpha-\cos\alpha$	6) $\cos\alpha$
7) $2\operatorname{tg}^2\alpha$	8) $\operatorname{tg}^2\dfrac{\alpha}{2}$	9) 1
10) $(\sin\alpha+\cos\alpha)^2$	11) $\cos 4\alpha$	12) 4
13) 1	14) $\sin 2\alpha$	15) 10
16) $\sin^2\alpha$	17) $\operatorname{ctg}\alpha$	18) 1
19) 1	20) $\operatorname{tg}^2 2\alpha$	21) $\sin^2\alpha$
22) -1	23) $\operatorname{tg} 2\alpha$	24) $\sin 8\alpha$
25) $\cos^2\dfrac{\alpha}{2}$	26) $\operatorname{tg}\alpha$	27) $\operatorname{tg} 2\alpha$
28) $\sin 2\alpha$	29) $\sin 4\alpha$	30) $\dfrac{1}{\sin\alpha}$
31) $2\sin\alpha$	32) $\operatorname{tg}^2\alpha$	33) 7
34) 0	35) $\lvert\cos\alpha-\cos\beta\rvert$	36) $\operatorname{ctg}\dfrac{\alpha}{2}$
37) $4\cos^2\left(\dfrac{\alpha-\beta}{2}\right)$	38) $\cos\alpha$	39) $\sin 2\alpha$
40) $\sin 2\alpha$	41) -1	42) 2
43) 1	44) 1	45) 0
46) 0	47) 0	48) $\sqrt{2}$
49) $-\operatorname{ctg}\alpha$	50) $\operatorname{tg} 3\alpha$	51) 0,25

БЛОК 3. Вычислите:

А

1) $\sqrt{3}\cos\frac{7\pi}{6}+\cos(-480°)$

2) $\sin\frac{2\pi}{3}+\cos\frac{\pi}{4}-\operatorname{tg}\frac{\pi}{4}$

3) $\cos^2 15°-4\sin^2 97{,}5°\cdot\cos^2 97{,}5°$

4) $\sqrt{3}\cos\left(-\frac{5\pi}{6}\right)-\sin 570°$

5) $\operatorname{tg}\frac{\pi}{6}+\sin\frac{5\pi}{6}+\cos\frac{\pi}{3}$

6) $8\sin 15°\cdot\cos 165°\cdot\sin 300°$

7) $\frac{1}{4}\cos(-330°)\cdot\operatorname{tg}690°$

8) $\operatorname{tg}\frac{\pi}{3}-\sin\frac{2\pi}{3}-\cos\frac{\pi}{6}$

9) $\left(\cos^2 67{,}5°-\sin^2 67{,}5°\right)-\sin^2 225°$

10) $\frac{\sin 46°-\sin 44°}{\cos 44°-\cos 46°}$

11) $\frac{\cos 72°+\cos 12°}{\sin 12°-\sin 72°}$

12) $\frac{\cos 155°-\cos 35°}{\sin 155°+\sin 35°}$

13) $8\sin 37°30'\cdot\cos 37°30'\cdot\cos 75°$

14) $\sin^4 15°+\cos^4 15°$

15) $\sin(30^\circ-\alpha)+\sin(30^\circ+\alpha)$

16) $\dfrac{\cos\frac{3\pi}{8}\cdot\cos\frac{\pi}{8}-\sin\frac{3\pi}{8}\cdot\sin\frac{\pi}{8}}{\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{4}+\beta\right)}$

17) $\cos^2 15^\circ-\cos^2 75^\circ$

18) $\dfrac{2\operatorname{tg}75^\circ}{1-\operatorname{tg}^2 75^\circ}$

19) $\dfrac{\operatorname{tg}^2 9^\circ-1}{2\operatorname{tg}9^\circ}$

20) $\dfrac{\cos\frac{\pi}{30}\cdot\cos\frac{\pi}{15}+\sin\frac{\pi}{30}\cdot\sin\frac{\pi}{15}}{\sin\frac{7\pi}{30}\cdot\cos\frac{4\pi}{15}+\cos\frac{7\pi}{30}\cdot\sin\frac{4\pi}{15}}$

21) $\cos 75^\circ+\cos 15^\circ$

22) $3+\dfrac{\operatorname{tg}15^\circ-\operatorname{tg}60^\circ}{1+\operatorname{tg}15^\circ\cdot\operatorname{tg}60^\circ}$

23) $\dfrac{10}{\sqrt{2}}\operatorname{ctg}135^\circ\cdot\sin 210^\circ\cdot\cos 225^\circ$

24) $\dfrac{2\cos^2 48^\circ-1}{\sin 186^\circ-\sin 6^\circ}$

25) $\dfrac{1-2\sin^2 43^\circ}{\sin 176^\circ+\sin 4^\circ}$

26) $\operatorname{ctg}(112^\circ 30')$

27) $\sin 50^\circ\cdot\cos 200^\circ-\cos 230^\circ\cdot\sin 20^\circ$

28) $\operatorname{tg}110^\circ+\operatorname{ctg}20^\circ$

29) $\dfrac{\sin 35^\circ + \cos 65^\circ}{2\cos 5^\circ}$

30) $\sin\dfrac{\pi}{8}\cdot\cos\dfrac{\pi}{8}\cdot\mathrm{tg}\dfrac{\pi}{8}\cdot\mathrm{ctg}\dfrac{9\pi}{8}$

B

31) $\sin 70^\circ\cdot\sin 50^\circ\cdot\sin 10^\circ$

32) $\dfrac{1-4\sin 10^\circ\cdot\sin 70^\circ}{2\sin 10^\circ}$

33) $\sqrt{(1-2\sin 45^\circ)^2}-\sqrt{(1-2\cos 45^\circ)^2}$

34) $\sqrt{(\mathrm{tg}\,60^\circ-2)^2}-\sqrt{(\mathrm{ctg}\,30^\circ-2)^2}$

35) $\cos 105^\circ$

36) $\cos 15^\circ$

37) $\mathrm{tg}\,75^\circ$

38) $\dfrac{\cos 70^\circ\cdot\cos 10^\circ+\cos 80^\circ\cdot\cos 20^\circ}{\cos 68^\circ\cdot\cos 8^\circ+\cos 82^\circ\cdot\cos 22^\circ}$

39) $\cos^2 3^\circ+\cos^2 123^\circ+\cos^2 117^\circ$

40) $\cos 20^\circ\cdot\cos 40^\circ\cdot\cos 80^\circ$

41) $-\cos 10^\circ+\dfrac{\sin^2 10^\circ}{2\sin^2 5^\circ}$

42) $\sin 50^\circ+\sin 40^\circ\cdot\mathrm{tg}\,20^\circ$

43) $(\mathrm{tg}\,60^\circ\cdot\cos 15^\circ-\sin 15^\circ)\cdot 7\sqrt{2}$

44) $\cos 92^\circ\cdot\cos 73^\circ-\sin 92^\circ\cdot\sin 73^\circ$

45) $\mathrm{ctg}\,35^\circ-\mathrm{tg}\,35^\circ-2\,\mathrm{tg}\,20^\circ$

46) $\sin 87^\circ-\sin 59^\circ-\sin 93^\circ+\sin 61^\circ$

ОТВЕТЫ

1) -2 2) $\frac{\sqrt{3}+\sqrt{2}-2}{2}$ 3) $\frac{\sqrt{3}}{2}$ 4) -1

5) $\frac{\sqrt{3}+3}{3}$ 6) $\sqrt{3}$ 7) $-\frac{1}{8}$ 8) 0

9) $\frac{-\sqrt{2}-1}{2}$ 10) 1 11) $-\sqrt{3}$ 12) $-\sqrt{3}$

13) 1 14) $\frac{7}{8}$ 15) $\cos\alpha$ 16) 0

17) $\frac{\sqrt{3}}{2}$ 18) $-\frac{\sqrt{3}}{3}$ 19) $-ctg18°$ 20) $\cos\frac{\pi}{30}$

21) $\frac{\sqrt{6}}{2}$ 22) 2 23) $-2,5$ 24) $0,5$

25) $0,5$ 26) $1-\sqrt{2}$ 27) $-0,5$ 28) 0

29) $\frac{1}{2}$ 30) $\frac{\sqrt{2}}{4}$ 31) $\frac{1}{8}$ 32) 1

33) 0 34) 0 35) $\frac{\sqrt{2}\left(1-\sqrt{3}\right)}{4}$ 36) $\frac{\sqrt{2}\left(1+\sqrt{3}\right)}{4}$

37) $2+\sqrt{3}$ 38) 1 39) $1,5$ 40) $\frac{1}{8}$

41) 1 42) 1 43) 14 44) $\frac{-\sqrt{2}\left(1+\sqrt{3}\right)}{4}$

45) 0 46) $\sin 1°$

БЛОК 4.

А

1) Вычислите $4\sin^2\alpha - 2\cos\alpha - \sqrt{3}\,\text{tg}\,\alpha + 1$, если $\text{ctg}\,\alpha = -\frac{1}{\sqrt{3}}$; $\alpha \in II$.

2) Вычислите $2\,\text{tg}\,\alpha \cdot \sin\alpha + 8\cos^2\alpha + 4$, если $\text{ctg}\,\alpha = \frac{1}{\sqrt{3}}$; $\alpha \in I$.

3) Вычислите $\text{tg}\,\alpha$, если $\text{tg}\frac{\alpha}{2} = \sqrt{2}$.

4) Вычислите $\text{tg}\frac{\alpha}{2}$, если $\cos\alpha = -\frac{3}{5}$.

5) Вычислите $\sqrt{\frac{2\sin\alpha - \sin 2\alpha}{2\sin\alpha + \sin 2\alpha}}$, если $\text{tg}\frac{\alpha}{2} = 1$.

6) Вычислите $\frac{\text{tg}\,\alpha + \text{ctg}\,\alpha}{\text{tg}\,\alpha - \text{ctg}\,\alpha}$, если $\text{ctg}\,\alpha = \frac{3}{2}$.

7) Вычислите $\frac{\sin\alpha \cdot \cos\alpha}{\sin^2\alpha - \cos^2\alpha}$, если $\text{tg}\,\alpha = \frac{3}{2}$.

8) Вычислите $\frac{1 + \text{tg}^2\alpha}{1 + \text{ctg}^2\alpha}$, если $\sin\alpha = \frac{2}{3}$.

9) Вычислите $\frac{1 - \text{tg}^2\alpha}{1 - \text{ctg}^2\alpha}$, если $\cos\alpha = -\frac{1}{3}$.

10) Вычислите $\text{tg}\left(\frac{\pi}{6} + \alpha\right)$, если $\text{ctg}\,\alpha = \sqrt{3}$.

11) Вычислите $\sin\alpha + \cos\alpha$, если $\text{tg}\frac{\alpha}{2} = 3$.

12) Вычислите $\sin 4\alpha$, если $\text{ctg}\,2\alpha = -2$.

13) Вычислите $\cos 2\alpha$, если $\text{tg}\,\alpha = \frac{1}{5}$.

14) Вычислите $\operatorname{tg}\alpha$, если $\cos\alpha = -\frac{2}{3}$; $\alpha \in II$.

15) Вычислите $\sqrt{5}\sin\alpha$, если $\operatorname{tg}\alpha = 2$; $\alpha \in III$.

16) Вычислите $\frac{87}{3+4\cos 2\alpha}$, если $\operatorname{tg}\alpha = 0,2$.

17) Вычислите $\operatorname{ctg}\alpha$, если $\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{4}-\alpha\right) = 2$.

18) Вычислите $\frac{2\sin\alpha + \sin 2\alpha}{2\sin\alpha - \sin 2\alpha}$, если $\cos\alpha = \frac{1}{5}$.

19) Вычислите $\frac{\sin\alpha - \sin\beta}{\cos\alpha + \cos\beta}$, если $\alpha - \beta = \frac{\pi}{2}$.

20) Вычислите $\alpha + \beta$, если $\operatorname{tg}\alpha + \operatorname{tg}\beta = \frac{5}{6}$ и $\operatorname{tg}\alpha \cdot \operatorname{tg}\beta = \frac{1}{6}$.

21) Вычислите $\cos(\alpha+\beta) + 2\sin\alpha \cdot \sin\beta$, если $\alpha = -45°$; $\beta = 15°$.

B

22) Вычислите $\operatorname{ctg}\left(\frac{\pi}{4}-\frac{\alpha}{2}\right)$, если $\sin\frac{\alpha}{2} = \frac{3}{5}$; $\alpha \in II$.

23) Вычислите $\cos\alpha$, если $\cos 2\alpha = \sin\alpha$; $\alpha \in \left(\frac{\pi}{2}; \pi\right)$.

24) Вычислите $\sin^4\alpha + \cos^4\alpha$, если $\sin\alpha + \cos\alpha = \frac{\sqrt{2}}{2}$.

25) Вычислите $\frac{7\sin^2\alpha + 5\sin\alpha \cdot \cos\alpha + 4}{6\sin\alpha \cdot \cos\alpha + 2\cos^2\alpha - 2}$, если $\operatorname{ctg}\alpha = 5$.

26) Вычислите $\sin\alpha \cdot \cos\alpha \cdot \operatorname{ctg}\alpha - 1$, если $\sin\alpha = \frac{\sqrt{3}}{3}$.

27) Вычислите $\sin(\alpha-\beta)$, если $\cos\alpha = \frac{5}{13}$; $\sin\beta = -0,6$; $\alpha \in I$; $\beta \in III$.

28) Вычислите $\operatorname{tg}(\alpha+\beta)$, если $\sin\alpha=-\frac{40}{41}$; $\operatorname{tg}\beta=\frac{9}{40}$; $\alpha\in IV$.

29) Вычислите $\sin^2 2\alpha$, если $\frac{1}{\operatorname{tg}^2\alpha}+\frac{1}{\operatorname{ctg}^2\alpha}+\frac{1}{\sin^2\alpha}+\frac{1}{\cos^2\alpha}=7$.

30) Вычислите $\operatorname{tg}4\alpha$, если $\sin 2\alpha=-0{,}6$ и $135^\circ<\alpha<180^\circ$.

31) Вычислите $A=\frac{\sin^2(4\alpha-540^\circ)}{\cos^2(4\alpha-540^\circ)}$, если $\sin 2\alpha=3^{-\frac{1}{2}}$.

32) Вычислите $\sin^4\alpha+\cos^4\alpha$, если $\sin 2\alpha=0{,}5$.

33) Вычислите $\frac{4\sin 2\alpha\cdot\cos\alpha}{(1+\cos\alpha)(1+\cos 2\alpha)}$, если $\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}=-1{,}25$.

34) Вычислите $13\sin(\alpha+\beta)$, если $\sin\alpha=\frac{4}{5}$; $\cos\beta=\frac{12}{13}$, причем α и β - острые углы.

35) Вычислите $\sin\left(2\alpha+\frac{\pi}{4}\right)$, если $\operatorname{tg}\alpha=\frac{1}{2}$.

36) Вычислите $\operatorname{tg}2x$, если $\operatorname{tg}(x+y)=3$ и $\operatorname{tg}(x-y)=2$.

37) Вычислите a, если $\cos 15^\circ-\sin 15^\circ=\frac{a}{4\cos 15^\circ}$.

38) Вычислите $\cos^3\alpha-\sin^3\alpha$, если $\cos\alpha-\sin\alpha=0{,}2$.

39) Вычислите $1+5\sin 2\alpha-3\cos^{-1}2\alpha$, если $\operatorname{tg}\alpha=-2$.

40) Вычислите $\operatorname{tg}\alpha$, если $\operatorname{tg}(\alpha-\beta)=2$; $\sin\beta=\frac{3}{5}$; $\frac{\pi}{2}<\beta<\pi$.

ОТВЕТЫ

1) 8
2) 9
3) $-2\sqrt{2}$
4) ± 2
5) 1
6) $-2\frac{3}{5}$
7) $\frac{6}{5}$
8) 0,8
9) -8
10) $\sqrt{3}$
11) $-\frac{1}{5}$
12) $-0,8$
13) $\frac{12}{13}$
14) $-\frac{\sqrt{5}}{2}$
15) -2
16) 13
17) -3
18) $\frac{3}{2}$
19) 1
20) $\frac{\pi}{4}+\pi k$; $k \in \mathbb{Z}$
21) $\frac{1}{2}$
22) 7
23) $-\frac{\sqrt{3}}{2}$
24) $\frac{7}{8}$
25) $\frac{34}{7}$
26) $-\frac{1}{3}$
27) $-\frac{33}{65}$
28) $-\frac{1519}{720}$
29) $\frac{8}{9}$
30) $-\frac{24}{7}$
31) 8
32) $\frac{7}{8}$
33) -5
34) 12,6
35) $\frac{7\sqrt{2}}{10}$
36) -1
37) $\sqrt{3}+1$
38) 0,296
39) 2
40) $\frac{1}{2}$

БЛОК 5. ВЫЧИСЛИТЕ:

А

1) $\operatorname{arc\,tg}\left(\frac{-\sqrt{3}}{3}\right)$

2) $\frac{1}{2}\operatorname{arc\,tg}\frac{\sqrt{3}}{3}-\frac{1}{2}\arcsin\left(-\frac{1}{2}\right)$

3) $\frac{1}{3}\operatorname{arc\,tg}\sqrt{3}+\frac{1}{2}\operatorname{arc\,tg}\left(-\frac{\sqrt{3}}{3}\right)$

4) $\frac{12}{\pi}\left(\arccos\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right)+\arcsin\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right)+\operatorname{arc\,tg}\left(-\sqrt{3}\right)\right)$

5) $2\arcsin\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right)+\operatorname{arc\,tg}(-1)+\arccos\frac{\sqrt{2}}{2}$

6) $\arccos\left(-\frac{1}{2}\right)-\arcsin\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$

B

7) $\cos\left(\arcsin\left(-\frac{1}{3}\right)\right)$

8) $\cos\left(\operatorname{arc\,tg}(-2)\right)$

9) $\operatorname{tg}\left(\arccos\left(-\frac{1}{4}\right)\right)$

10) $\sin\left(\arccos\frac{2}{3}\right)$

11) $\sin\left(\operatorname{arc\,tg}\left(-\frac{2}{3}\right)\right)$

12) $\operatorname{tg}\left(\arcsin\left(-\frac{1}{3}\right)+\frac{\pi}{2}\right)$

13) $\operatorname{ctg}\left(2\pi-3\arcsin\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$

14) $\sin\left(2\arccos\frac{3}{5}\right)$

15) $\cos\left(2\arcsin\frac{1}{5}\right)$

16) $\sin\left(2\arcsin\frac{1}{7}\right)$

17) $\operatorname{tg}\left(2\arccos\left(-\frac{2}{3}\right)\right)$

18) $\sin\left(\frac{1}{2}\operatorname{arcctg}\left(-\frac{3}{4}\right)\right)$

19) $\cos(2\operatorname{arcctg} x)$

20) $\cos\left(2\arcsin\frac{2}{7}\right)$

21) $\sin\left(\frac{1}{2}\arccos\frac{2}{3}\right)$

22) $\cos\left(\frac{1}{2}\arccos\frac{2}{3}\right)$

23) $\sin\left(\arcsin\frac{5}{13}+\arcsin\frac{12}{13}\right)$

24) $\cos\left(\arcsin\left(-\frac{12}{13}\right)+\arcsin\frac{4}{5}\right)$

25) $\sin(\arcsin 0{,}6+\arccos 0{,}8)$

26) $\sin\left(\frac{\pi}{2}-2\operatorname{arctg} 0{,}28\right)$

27) $\sin\left(2\arcsin\frac{1}{3}\right)$

28) $\operatorname{tg}\left(\operatorname{arctg}\frac{1}{3}+\operatorname{arctg}\frac{1}{9}\right)$

29) $\sin(2\operatorname{arctg} 3) - \cos(2\operatorname{arctg} 2)$

30) $\sin\left(\arcsin\frac{1}{2} + \arccos\frac{1}{2}\right)$

ОТВЕТЫ

1) $-\frac{\pi}{6}$	2) $\frac{\pi}{6}$	3) $\frac{\pi}{36}$	4) 2	5) $-\frac{2\pi}{3}$
6) $\frac{\pi}{3}$	7) $\frac{2\sqrt{2}}{3}$	8) $\frac{\sqrt{5}}{5}$	9) $-\sqrt{15}$	10) $\frac{\sqrt{5}}{3}$
11) $-\frac{2\sqrt{13}}{13}$	12) $2\sqrt{2}$	13) 1	14) 0,96	15) $\frac{23}{25}$
16) $\frac{8\sqrt{3}}{49}$	17) $4\sqrt{5}$	18) $\frac{2\sqrt{5}}{5}$	19) $\frac{x^2-1}{x^2+1}$	20) $\frac{41}{49}$
21) $\frac{\sqrt{6}}{6}$	22) $\sqrt{\frac{5}{6}}$	23) 1	24) $\frac{63}{65}$	25) $\frac{24}{25}$
26) $\frac{288}{337}$	27) $\frac{4\sqrt{2}}{9}$	28) $\frac{6}{13}$	29) $\frac{6}{5}$	30) 1

БЛОК 6.

С

Упростите:

1) $4\sin^3\alpha \cdot \cos 3\alpha + 4\cos^3\alpha \cdot \sin 3\alpha$

2) $\sqrt{\frac{1-\cos\alpha}{1+\cos\alpha}} + \sqrt{\frac{1+\cos\alpha}{1-\cos\alpha}}$, если $\alpha \in I$ чет.

3) $\frac{\cos^4\alpha - \sin^4\alpha - \cos^2\alpha}{2(\cos\alpha - 1)}$

4) $\dfrac{2\sin\alpha+\sin 2\alpha}{2\cos\alpha+\sin 2\alpha}\cdot\dfrac{1-\cos\alpha}{1-\sin\alpha}$

5) $\sqrt{\dfrac{1+\cos\alpha}{1-\cos\alpha}}-\sqrt{\dfrac{1-\cos\alpha}{1+\cos\alpha}}$, если $\alpha\in\left(\pi;\dfrac{3\pi}{2}\right)$.

6) $\sqrt{\left(\dfrac{1}{\cos^2\alpha}-1\right)\left(1-\sin^2\alpha\right)}$, если $\alpha\in\left(\dfrac{\pi}{2};\pi\right)$.

7) $\sqrt{\dfrac{1-\cos\alpha}{1+\cos\alpha}}\cdot\operatorname{ctg}\dfrac{\alpha}{2}-\sin^2\alpha$, если $\alpha=\dfrac{5\pi}{6}$.

8) $\dfrac{\sin\alpha+\sin 3\alpha+\sin 5\alpha}{\cos\alpha+\cos 3\alpha+\cos 5\alpha}$, если $\alpha=\dfrac{\pi}{9}$.

9) $4\cos^2\left(45^\circ-\dfrac{\alpha}{2}\right)+\sqrt{4\sin^4\alpha+\sin^2 2\alpha}$, если $180^\circ<\alpha<270^\circ$.

10) $\sin^2\alpha+\cos\left(60^\circ+\alpha\right)\cdot\cos\left(60^\circ-\alpha\right)$

Вычислите:

11) $\operatorname{ctg}70^\circ+4\cos 70^\circ$

12) $4\operatorname{arctg}\dfrac{1}{5}-\operatorname{arctg}\dfrac{1}{239}$

13) $0,25\sin 20^\circ-\dfrac{\sqrt{3}}{4}\cos 20^\circ+\cos^2 25^\circ$

14) $\dfrac{\sin^3 15^\circ+\cos^3 15^\circ}{\sin 15^\circ+\cos 15^\circ}$

15) $\cos^2 5+\cos^2 1-\cos 6\cdot\cos 4$

16) Вычислите $A=9\sin\left(2\alpha-450^\circ\right)$, если $\sin\dfrac{\alpha}{2}=-\dfrac{1}{\sqrt{3}}$.

17) Вычислите $\operatorname{ctg}\alpha$, если $2\sin 3\alpha\cdot\cos 5\alpha-0,5=\sin 8\alpha$.

18) Вычислите $\cos\left(2\alpha+\frac{7\pi}{4}\right)$, если $\operatorname{ctg}\alpha=\frac{2}{3}$.

19) Вычислите $A=7\operatorname{tg}^{-2}(2\alpha-7\pi)$, если $\sin\alpha=-\frac{1}{\sqrt{8}}$.

20) Вычислите $\dfrac{\sin\left(\frac{3\pi}{2}-5\alpha\right)}{2-\cos\left(\frac{\pi}{2}-5\alpha\right)}$, если $\operatorname{tg}\frac{5\alpha}{2}=3$.

21) Вычислите $10\cos 2\alpha$, если $\operatorname{tg}\left(\alpha-\frac{\pi}{6}\right)=5\sqrt{3}-8$.

22) Вычислите $\alpha+\beta$ в градусах, если α и β - острые углы, такие что $\operatorname{ctg}\alpha=4$; $\operatorname{ctg}\beta=\frac{5}{3}$.

23) Вычислите $A=\dfrac{2\operatorname{tg}\alpha}{\left(1+\operatorname{tg}^2\alpha\right)^2}\cdot\left(1-\operatorname{tg}^2\alpha\right)$, если $\cos 4\alpha=\frac{12}{13}$.

24) Найдите наибольшее значение выражения $(\cos x+5)(3-\cos x)$.

ОТВЕТЫ

1) $3\sin 4\alpha$	**2)** $\frac{2}{\sin\alpha}$	**3)** $\cos^2\frac{\alpha}{2}$	**4)** $\operatorname{tg}^3\alpha$	**5)** $-2\operatorname{ctg}\alpha$
6) $\sin\alpha$	**7)** $\frac{3}{4}$	**8)** $\sqrt{3}$	**9)** 2	**10)** $\frac{1}{4}$
11) $\sqrt{3}$	**12)** $\frac{\pi}{4}$	**13)** 0,5	**14)** $\frac{3}{4}$	**15)** 1
16) 7	**17)** $-2\pm\sqrt{3}$	**18)** $\frac{7\sqrt{2}}{26}$	**19)** 9	**20)** $\frac{4}{7}$
21) -6	**22)** $\frac{\pi}{4}$	**23)** $\pm\frac{5}{26}$	**24)** 16	

§2. РЕШЕНИЕ ТРИГОНОМЕТРИЧЕСКИХ УРАВНЕНИЙ

БЛОК 1. Решите простейшие тригонометрические уравнения:

А

1) $3\sin\frac{x}{3}=0$

2) $4\cos 3x+4=0$

3) $0{,}5\cos 2x=0$

4) $\operatorname{tg}(x+2)=0$

5) $2\sin 3x+1=0$

6) $\sqrt{3}-\operatorname{tg} 2x=0$

7) $2\cos\frac{x}{2}-1=0$

8) $\sin\left(\frac{\pi}{6}+\frac{x}{2}\right)+1=0$

9) $\sqrt{2}\cos\left(2x-\frac{\pi}{5}\right)-1=0$

10) $\sqrt{3}+3\operatorname{ctg}\left(\frac{\pi}{4}-3x\right)=0$

11) $\sin\left(-\frac{x}{4}\right)=\frac{\sqrt{2}}{2}$

12) $\cos\left(2x+\frac{\pi}{6}\right)=-\frac{1}{2}$

13) $\sin\left(3x+\frac{\pi}{2}\right)=-\frac{\sqrt{2}}{2}$

14) $\cos\left(\frac{\pi}{3}-\frac{2}{3}x\right)=1$

15) $2\cos\left(2x-\frac{\pi}{6}\right)+\sqrt{3}=0$

16) $3\operatorname{tg}\left(x+\frac{5\pi}{36}\right)+\sqrt{3}=0$

17) $\operatorname{ctg}\left(\frac{\pi}{6}-x\right)=\frac{\sqrt{3}}{3}$

18) $\operatorname{ctg}\left(\frac{\pi}{3}-x\right)=\sqrt{3}$

19) $2\cos\left(6x-\frac{\pi}{4}\right)=-\sqrt{3}$

20) $\sin(2x-40^\circ)=\frac{\sqrt{3}}{2}$

21) $\cos\frac{x}{2}=\frac{3}{2}$

22) $\operatorname{tg}(2x+1)=0$

23) $\operatorname{tg}\left(-\frac{x}{3}\right)=\frac{1}{\sqrt{3}}$

24) $\cos(2x+5^\circ)-\frac{\sqrt{2}}{2}=0$

25) $1-\sin\frac{3x}{2}=\frac{3}{4}$

26) $\cos x=\frac{1}{2}$, найдите наибольшее решение уравнения из промежутка $[700^\circ; 1050^\circ]$.

27) $\sin(\pi + x) + \cos\left(\frac{\pi}{2} + x\right) = -1$

28) $2\sqrt{3}\ \mathrm{tg}(-x) + 6 = 0$

29) $\cos\left(x - \frac{\pi}{4}\right) = -\frac{1}{2}$

30) $\mathrm{tg}\left(\frac{\pi}{4} - \frac{x}{2}\right) = -1$

31) $\cos\left(\frac{4x}{3} + \frac{\pi}{3}\right) = 1$

32) $\lg \cos x = 1$

33) $\sin\left(\frac{\pi}{4} - x\right) = \frac{1}{2}$

34) $2\sin x \cdot \sin\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = 1$

35) $\frac{\sqrt{3}}{2}\ \mathrm{tg}\left(2x - \frac{\pi}{4}\right) = \sin\frac{\pi}{3}$

36) $\mathrm{tg}(3x - 10^\circ) = 0$

37) $\log_3 \cos x = 0$

38) $\left(\cos\frac{x}{2} + 1\right)\left(\sin^2\frac{x}{2} + 2\right) = 0$

39) $\cos(x - 1) = \frac{\sqrt{3}}{2}$

40) $2\cos x + 3\sin x = 0$

41) $\cos 2x - \sqrt{3}\sin 2x = 0$, $x \in [-1; 4]$

42) $\sin\left(x + \frac{\pi}{6}\right) + \cos\left(x + \frac{\pi}{6}\right) = 0$

43) $\sqrt{3}\sin\left(x - \frac{\pi}{3}\right) + 3\cos\left(x - \frac{\pi}{3}\right) = 0$

44) $3\sin\left(\frac{\pi}{2} + x\right) = 4\cos\left(\frac{3\pi}{2} - x\right)$

ОТВЕТЫ

1) $3\pi k$

2) $\frac{\pi}{3} + \frac{2\pi k}{3}$

3) $\frac{\pi}{4} + \frac{\pi k}{2}$

4) $-2 + \pi k$

5) $(-1)^{k+1}\frac{\pi}{18} + \frac{\pi k}{3}$

6) $\frac{\pi}{6} + \frac{\pi k}{2}$

7) $\pm\frac{2\pi}{3} + 4\pi k$

8) $-\frac{4\pi}{3} + 4\pi k$

9) $\frac{9\pi}{40} + \pi k$; $-\frac{\pi}{40} + \pi$

10) $\frac{7\pi}{36} + \frac{\pi k}{3}$

11) $(-1)^{k+1}\pi + 4\pi k$

12) $-\frac{\pi}{12} \pm \frac{\pi}{3} + \pi k$

13) $\pm\frac{\pi}{4} + \frac{2\pi k}{3}$

14) $\frac{\pi}{2} + 3\pi k$

15) $\frac{\pi}{2} + \pi k$; $-\frac{\pi}{3} + \pi k$

16) $-\frac{11\pi}{36}+\pi k$ 17) $\frac{5\pi}{6}+\pi k$ 18) $\frac{7\pi}{6}+\pi k$

19) $\pm\frac{5\pi}{36}+\frac{\pi}{24}+\frac{\pi k}{3}$ 20) $(-1)^k 30°+20°+90°\cdot k$ 21) $\varnothing$

22) $-\frac{1}{2}+\frac{\pi k}{2}$ 23) $-\frac{\pi}{2}+3\pi k$

24) $-2°30'\pm 22°30'+180°\cdot k$ 25) $\frac{2}{3}\left((-1)^k \arcsin\frac{1}{4}+\pi k\right)$

26) $1\,020°$ 27) $(-1)^k\frac{\pi}{6}+\pi k$ 28) $\frac{\pi}{3}+\pi k$

29) $\frac{\pi}{4}\pm\frac{2\pi}{3}+2\pi k$ 30) $\pi(2k+1)$ 31) $-\frac{\pi}{4}+\frac{3\pi k}{2}$

32) $x\in\varnothing$ 33) $(-1)^{k+1}\frac{\pi}{6}+\frac{\pi}{4}+\pi k$ 34) $\frac{\pi}{4}+\pi k$

35) $\frac{\pi}{4}+\frac{\pi k}{2}$ 36) $3°20'+60°\cdot k$ 37) $2\pi k$

38) $2\pi+4\pi k$ 39) $1\pm\frac{\pi}{6}+2\pi k$ 40) $-\operatorname{arctg}\frac{2}{3}+\pi k$

41) $\left\{\frac{\pi}{12};\frac{7\pi}{12};\frac{13\pi}{12}\right\}$ 42) $-\frac{5\pi}{12}+\pi k$ 43) πk

44) $-\operatorname{arctg}\frac{3}{4}+\pi k$

***В ответах параметр $k\in\mathbb{Z}$.**

B

1) $3^{|\sin x-1|}=9$ 2) $4^{\sin x\cdot\cos x}=\sqrt{2}$

3) $5^{1+\log_5\cos x}=2,5$ 4) $8^{\sin^2 x}-2^{\cos^2 x}=0$

5) $3^{1-\cos^2 x}=\operatorname{tg}60°$, если $x\in[0;4\pi]$. Найдите количество решений.

6) $4^{\cos 2x}+4^{\cos^2 x}=3$ 7) $1+2\sin\frac{\pi x}{3}=0$, если $x\in(2;4)$

8) $\sin(\pi\cos 3x)=1$

9) $(3\cos\pi x-\pi)(2\sin\pi x-\sqrt{3})=0$, найдите наименьший положитель корень уравнения.

10) $1+2\cos\frac{\pi x}{15}=0$

11) $\mathrm{tg}\left(\pi x-\frac{\pi}{2}\right)=\sqrt{3}$

12) $\cos(\mathrm{tg}\, x)=0$

13) $\sin(\pi\sqrt{x})=-1$

14) $\cos^2\left(\frac{\pi x}{2}\right)=1$, если $x\in[\pi;3\pi]$

15) $\sin\left(\frac{4x}{3}+\frac{\pi}{6}\right)=-\frac{1}{2}$, если $x\in[-2\pi;2\pi)$

16) $\sin\left(\frac{3x}{5}-\frac{\pi}{3}\right)=-\frac{\sqrt{3}}{2}$, если $x\in[-2;9)$

17) $\sin\left(3x-\frac{\pi}{4}\right)=\mathrm{ctg}\,4005^\circ$

18) $\sin\frac{x}{3}=\left(\sqrt{25-x^2}\right)^2+x^2-25$

19) $\cos^2 2x=\frac{1}{2}$

20) $\sin^2 2x=\frac{1}{2}$

21) $\cos^2(x-4)=\frac{\sqrt{5}-2}{2\sqrt{5}-4}$, вычислите наименьший положительный корень.

22) $|\sin 2x|=1$

23) $|\cos 2x| = 1$

24) $|\operatorname{tg}(-x)| = \frac{1}{\sqrt{3}}$

25) $|\sin 2x| = \frac{1}{2}$

26) $\sin 4x \cdot \operatorname{ctg} x = 0$

27) $\sin\left(4x + \frac{\pi}{6}\right) \cdot \cos\left(5x - \frac{\pi}{2}\right) = 0$, найдите наименьший положительный корень.

28) $\operatorname{tg} x \cdot (\sin x - 1) = 0$

29) $\sin\left(x - \frac{\pi}{4}\right) \cdot (\sin 2x + 1) = 0$

30) $(\cos 3x - 1) \cdot \sin\frac{x}{2} = 0$

31) $\cos x \cdot (\cos 2x - 1) = 0$

32) $\sin 3x \cdot (\cos x + 1) = 0$

33) $(1 + \sin x) \cdot \left(1 - \operatorname{tg}\frac{x}{2}\right) = 0$

34) $(1 + \cos x) \cdot \operatorname{tg}\frac{x}{2} = 0$

35) $\cos x \cdot \operatorname{tg} 3x = 0$

36) $\sin 4x \cdot \cos x \cdot \operatorname{tg} 2x = 0$

37) $\dfrac{\cos x - \frac{1}{2}}{\sin x - \frac{\sqrt{3}}{2}} = 0$

38) $\dfrac{\operatorname{tg} 3x}{\sin x}=0$

39) $\dfrac{2\sin x-\sqrt{3}}{2\cos x+1}=0$

40) $\dfrac{\cos\left(x-\dfrac{\pi}{3}\right)}{\sin\left(\dfrac{x}{4}-\pi\right)}=0$

41) $\dfrac{\operatorname{ctg} x}{\operatorname{ctg} 2x}=0$

42) $\dfrac{\sqrt{2}\sin x-1}{2\cos x-\sqrt{2}}=0$

43) $\dfrac{\cos 2x}{1+\operatorname{tg} x}=0$

44) $\dfrac{\sin(x-45^\circ)}{\cos x-\dfrac{\sqrt{2}}{2}}=0$

45) $\dfrac{2\cos x+\sqrt{3}}{2\sin x-1}=0$

46) $\dfrac{1-\sin 3x}{1+\sin x}=0$

47) $\dfrac{\cos x}{1+\cos 2x}=0$

48) $\dfrac{\cos\dfrac{x}{2}}{\sin\dfrac{x}{3}}=0$

49) $\dfrac{\sin 2x}{\cos 3x}=0$

ОТВЕТЫ

1) $-\dfrac{\pi}{2}+2\pi k$

2) $(-1)^k\dfrac{\pi}{12}+\dfrac{\pi k}{2}$

3) $\pm\dfrac{\pi}{3}+2\pi k$

4) $\pm\dfrac{\pi}{6}+\pi k$

5) 8

6) $\dfrac{\pi}{4}+\dfrac{\pi k}{2}$

7) 3,5

8) $\pm\dfrac{\pi}{9}+\dfrac{2\pi k}{3}$

9) $\dfrac{1}{3}$

10) $\pm 10+30k$

11) $\dfrac{5}{6}+k$

12) $\operatorname{arc\,tg}\left(\dfrac{\pi}{2}+\pi k\right)+\pi n$

13) $\left(-\dfrac{1}{2}+2m\right)^2$

14) $\{4; 6; 8\}$

15) $\left\{-\dfrac{7\pi}{4}; -\dfrac{3\pi}{4}; -\dfrac{\pi}{4}; \dfrac{3\pi}{4}; \dfrac{5\pi}{4}\right\}$

16) $\left\{-\dfrac{5\pi}{9}; 0; \dfrac{25\pi}{9}\right\}$

17) $\dfrac{\pi}{4}+\dfrac{2\pi k}{3}$

18) $x=0$

19) $\frac{\pi}{8}(2k+1)$

20) $\frac{\pi}{8}+\frac{\pi k}{4}$

21) $\frac{16-5\pi}{4}$

22) $\frac{\pi}{4}+\frac{\pi k}{2}$

23) $\frac{\pi k}{2}$

24) $\pm\frac{\pi}{6}+\pi k$

25) $\pm\frac{\pi}{12}+\frac{\pi k}{2}$

26) $\frac{\pi}{2}+\pi k$; $\frac{\pi}{4}+\frac{\pi n}{2}$

27) $\frac{\pi}{5}$

28) πk

29) $\frac{\pi}{4}+\frac{\pi k}{2}$

30) $\frac{2\pi k}{3}$

31) $\frac{\pi k}{2}$

32) $\frac{\pi k}{3}$

33) $\frac{\pi}{2}+\pi k$

34) $2\pi k$

35) $\frac{\pi k}{3}$

36) $\frac{\pi k}{2}$

37) $-\frac{\pi}{3}+2\pi k$

38) $\frac{\pi}{3}(3k\pm1)$

39) $\frac{\pi}{3}+2\pi k$

40) $\frac{5\pi}{6}+\pi k$.

41) $\varnothing$

42) $\frac{3\pi}{4}+2\pi k$

43) $\frac{\pi}{4}+\pi k$

44) $\frac{5\pi}{4}+2\pi k$

45) $-\frac{5\pi}{6}+2\pi k$

46) $(-1)^k\frac{\pi}{6}+\pi k$

47) $\varnothing$

48) $\pi+6\pi k$; $5\pi+6\pi n$

49) πk

***В ответах параметры** $k; n\in\mathbb{Z}$; $m\in\mathbb{N}$.

<u>БЛОК 2</u>. Решите уравнения, применяя основные тригонометрические формулы:

А

1) $\cos 2x\cdot\cos x=\sin 2x\cdot\sin x$

2) $\sin^2\frac{x}{2}-\cos^2\frac{x}{2}=0,5$

3) $2\sin\frac{x}{4}\cdot\cos\frac{x}{4}-1=0$

4) $3\cos^2 x-2\sin x=3-3\sin^2 x$

5) $\cos\left(\frac{\pi}{6}-x\right)+0,5\sin x=\frac{\sqrt{3}}{2}\cos x$

6) $\sin\left(\frac{\pi}{3}+x\right)-\frac{1}{2}\sin x=\frac{\sqrt{3}}{2}$

7) $\cos^4\frac{x}{4}-\sin^4\frac{x}{4}=-\frac{1}{2}$

8) $3\operatorname{tg}3x-\sin^2 2x=\cos^2 2x$

9) $\cos 3x\cdot\cos x-\sin 3x\cdot\sin x=-\frac{1}{2}$

10) $2\left(\cos^4 x-\sin^4 x\right)=1$

11) $2\cos\left(x+\frac{\pi}{6}\right)=\sqrt{3}\cos x$

12) $\cos 2x=2\sin^2 x$

13) $\sin^2 3x=3\cos^2 3x$

14) $\cos 6x+6\cos^2 3x=1$

15) $\dfrac{\operatorname{tg}\frac{x}{2}+\operatorname{tg}\left(x+\frac{\pi}{4}\right)}{1-\operatorname{tg}\left(x+\frac{\pi}{4}\right)\cdot\operatorname{tg}\frac{x}{2}}=\sqrt{3}$

16) $\dfrac{\operatorname{tg}\left(2x-\frac{\pi}{6}\right)+1}{1-\operatorname{tg}\left(2x-\frac{\pi}{6}\right)}=1$

17) $\left(1+\sin\left(2\pi-x\right)\right)\left(1+\sin\left(\pi-x\right)\right)=\frac{1}{2}$

18) $\cos^2 3x+\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{2}+2x\right)=2-\sin^2 3x$

19) $\sin^2\left(5\pi+2x\right)+\cos^2\left(\frac{3\pi}{2}-2x\right)=2$

20) $2\cos x\cdot\sin 3x=\sin 4x+1$

21) $\operatorname{ctg}\left(\frac{\pi}{2}-x\right)\cdot\operatorname{tg}\left(x+\pi\right)-3=0$

22) $2\cos\left(\pi-x\right)\cdot\sin\left(2{,}5\pi+x\right)+1=0$

23) $\left(\sin 2x-\cos 2x\right)^2=1$

24) $\operatorname{tg}^2 x+\dfrac{1}{\cos^2 x}=7$

25) $\sin x\cdot\cos\frac{\pi}{8}+\cos x\cdot\sin\frac{\pi}{8}=\frac{1}{2}$, если $x\in\left[-\frac{3\pi}{2};\pi\right]$

ОТВЕТЫ

1) $\frac{\pi}{6}+\frac{\pi k}{3}$

2) $\pm\frac{2\pi}{3}+2\pi k$

3) $\pi+4\pi k$

4) πk

5) πk

6) $2\pi k$

7) $\pm\frac{4\pi}{3}+4\pi k$

8) $\frac{1}{3}\operatorname{arctg}\frac{1}{3}+\frac{\pi k}{3}$

9) $\pm\frac{\pi}{6}+\frac{\pi k}{2}$

10) $\pm\frac{\pi}{6}+\pi k$

11) πk

12) $\pm\frac{\pi}{6}+\pi k$

13) $\pm\frac{\pi}{9}+\frac{\pi k}{3}$

14) $\pm\frac{\pi}{9}+\frac{\pi k}{3}$

15) $\frac{\pi}{18}+\frac{2\pi k}{3}$

16) $\frac{\pi}{12}+\frac{\pi k}{2}$

17) $\frac{\pi}{4}+\frac{\pi k}{2}$

18) $\frac{3\pi}{8}+\frac{\pi k}{2}$

19) $\frac{\pi}{4}+\frac{\pi k}{2}$

20) $\frac{\pi}{4}+\pi k$

21) $\pm\frac{\pi}{3}+\pi k$

22) $\frac{\pi}{4}+\frac{\pi k}{2}$

23) $\frac{\pi k}{4}$

24) $\pm\frac{\pi}{3}+\pi k$

25) $\left\{-\frac{31\pi}{24};\frac{\pi}{24};\frac{17\pi}{24}\right\}$

*В ответах параметр $k\in\mathbb{Z}$

В

1) $\cos^3 x\cdot\sin x-\sin^3 x\cdot\cos x=\frac{\sqrt{2}}{8}$

2) $\sin\left(x+\frac{\pi}{3}\right)\cdot\cos\left(x-\frac{\pi}{6}\right)=1$

3) $8\sin x\cdot\cos x\cdot\cos 2x=-1$

4) $\sin(2x+3\pi)\cdot\sin\left(3x+\frac{3\pi}{2}\right)-\sin 3x\cdot\cos 2x=-1$

5) $\cos\frac{x}{2}\cdot\cos x=\frac{1}{4\sin\frac{x}{2}}$

6) $\left(\sin^2 x-\cos^2 x\right)^2-4\cos^2 x\cdot\sin^2 x=-\frac{\sqrt{2}}{2}$

7) $1-\sin x=\sin^2\left(\frac{\pi}{4}-\frac{x}{2}\right)$

8) $\operatorname{ctg} x-\operatorname{tg} x=\frac{16}{\pi}\operatorname{arc\,tg}\left(\operatorname{tg}\frac{7\pi}{8}\right)$

9) $\sin\left(x+\frac{\pi}{3}\right)+\cos\left(x+\frac{\pi}{6}\right)+\sqrt{3}=0$

10) $\cos^2 204°+\sin^2 336°=\operatorname{tg} 2x$

11) $\operatorname{tg} x=\cos^2 3+\cos^2 1-\cos 4\cdot\cos 2$

12) $\sin^4 x-\cos^4 x=\sin 2x$

13) $\sin^4 x+\cos^4 x=\frac{5}{8}$

14) $\sin^4 x+\cos^4 x=\frac{1}{2}\sin^2 2x$

15) $\cos^6 x+\sin^6 x=\frac{1}{4}\sin^2 2x$

ОТВЕТЫ

1) $(-1)^k\frac{\pi}{16}+\frac{\pi k}{4}$

2) $\frac{\pi}{6}+\pi k$

3) $(-1)^{k+1}\frac{\pi}{24}+\frac{\pi k}{4}$

4) $\frac{\pi}{2}+2\pi k$

5) $\frac{\pi}{4}+\pi k$

6) $\pm\frac{3\pi}{16}+\frac{\pi k}{2}$

7) $\frac{\pi}{2}+2\pi k$

8) $\frac{3\pi}{8}+\frac{\pi k}{2}$

9) $\pi+2\pi k$

10) $\frac{\pi}{8}+\frac{\pi k}{2}$ 11) $\frac{\pi}{4}+\pi k$ 12) $-\frac{\pi}{8}+\frac{\pi k}{2}$

13) $\pm\frac{\pi}{6}+\frac{\pi k}{2}$ 14) $\frac{\pi}{4}+\frac{\pi k}{2}$ 15) $\frac{\pi}{4}+\frac{\pi k}{2}$

***В ответах параметр** $k \in \mathbb{Z}$.

БЛОК 3. Решите уравнения методом разложения на множители:

А

1) $2\sin^2 x-\sin x=0$

2) $\sqrt{3}\sin x\cdot\cos x=\sin^2 x$

3) $\sin^2 x-\frac{1}{2}\sin 2x=0$

4) $3\sin x\cdot\cos x-2\cos^2 x=0$

5) $\sin 2x=2\sqrt{3}\cos^2 x$

6) $\sin^2 x+\frac{1}{2}\sin 2x=1$

7) $\cos 2x\cdot\sin x=\cos 2x$, если $90°<x<180°$

8) $2\sin^2 x-\sqrt{3}\sin 2x=0$, если $x\in(0°;90°)$.

9) $\sin 3x+\sin x=0$

10) $\sin x+\sin 2x+\sin 3x=0$

11) $\sin x+\sin 3x=2\sin 2x$

12) $\cos 5x\cdot\cos x=\cos 4x$

13) $\sin x\cdot\sin 2x+\cos 3x=0$

14) $\cos x\cdot\cos 4x=\cos 5x$

15) $\sin 3x-2\sin x=0$

16) $\operatorname{tg}(x+20°)+\operatorname{tg}(70°-x)=2$

17) $3\cos^2\frac{x}{3}-3=4\sin\frac{x}{3}$

18) $\cos\left(\frac{3\pi}{2}+5x\right)-\sin x=2\cos 3x$

19) $\sin 2x\cdot\cos 2x-\sin x\cdot\cos x=0$

20) $\sin 2x=\operatorname{tg} x$

21) $4\sin^2 x=\sqrt{3}\operatorname{tg} x$

22) $\cos^2 2x+\cos^2 3x=1$

23) $1+\sin x+\cos(2x-180^\circ)=0$, если $180^\circ<x<270^\circ$

24) $2\sin^2 3x+\cos^2 3x+\sin 3x=1$, найдите число различных решений на отрезке $x\in[0^\circ;180^\circ]$.

25) $4\sin\frac{x}{2}-\cos x+1=0$

26) $\left(2\cos x-\sqrt{3}\right)\cdot\sqrt{\sin x}=0$

27) $\frac{\left(\operatorname{tg} x+\sqrt{3}\right)(2\cos x-1)}{\sqrt{\sin x}}=0$

28) $2\operatorname{tg} 2x\cdot\sin\frac{x}{2}\cdot\sin x\cdot\cos\frac{x}{2}+\operatorname{tg} 2x=0$

29) $(1+\cos x)\left(\frac{1}{\sin x}-1\right)=0$

30) $\frac{\cos^2 x+\cos x}{\sin x}=0$

31) $\sin 5x+\sin x+2\sin^2 x=1$, $x\in(-90^\circ;0^\circ)$. Найдите сумму корней уравнения.

32) $(\operatorname{tg} x - 1)\left(\sqrt{2}\sin x + 1\right) = 0$, найдите все корни уравнения, удовлетворяющие неравенству $\cos x < 0$.

33) $\cos^3 x + \cos^2 x - 4\cos^2 \dfrac{x}{2} = 0$

ОТВЕТЫ

1) $(\ \ 1)^k \dfrac{\pi}{6} + \pi k;\ \ \pi n$

2) $\pi k;\ \ \dfrac{\pi}{3} + \pi n$

3) $\pi k;\ \ \dfrac{\pi}{4} + \pi n$

4) $\dfrac{\pi}{2} + \pi k;\ \ \operatorname{arctg}\dfrac{2}{3} + \pi n$

5) $\dfrac{\pi}{2} + \pi k;\ \ \dfrac{\pi}{3} + \pi n$

6) $\dfrac{\pi}{2} + \pi k;\ \ \dfrac{\pi}{4} + \pi n$

7) $135°$

8) $60°$

9) $\dfrac{\pi k}{2}$

10) $\dfrac{\pi k}{2};\ \ \pm\dfrac{2\pi}{3} + 2\pi n$

11) $\dfrac{\pi k}{2}$

12) $\dfrac{\pi k}{5}$

13) $\dfrac{\pi}{4}(2k+1);\ \ \dfrac{\pi}{2}(2n+1)$

14) $\dfrac{\pi k}{4}$

15) $\pi k;\ \ \pm\dfrac{\pi}{6} + \pi n$

16) $25° + 180° \cdot k$

17) $3\pi k$

18) $\dfrac{\pi}{6} + \dfrac{\pi k}{3};\ \ \dfrac{\pi}{4} + \pi n$

19) $\pi k;\ \ \dfrac{\pi}{6} + \dfrac{\pi n}{3}$

20) $\pi k;\ \ \dfrac{\pi}{4} + \dfrac{\pi n}{2}$

21) $\pi k;\ \ (-1)^n \dfrac{\pi}{6} + \dfrac{\pi n}{2}$

22) $\dfrac{\pi}{10} + \dfrac{\pi k}{5};\ \ \dfrac{\pi}{2} + \pi n$

23) $210°$

24) 5

25) $2\pi k$

26) $\dfrac{\pi}{6} + 2\pi k;\ \ \pi n$

27) $(-1)^k \dfrac{\pi}{3} + \pi k$

28) $\dfrac{\pi k}{2}$

29) $\dfrac{\pi}{2} + 2\pi k$

30) $\dfrac{\pi}{2} + \pi k$

31) $-115°$

32) $\dfrac{5\pi}{4} + 2\pi k$

33) $\pi + 2\pi k$

*В ответах параметр $k; n \in \mathbb{Z}$.

В

1) $\cos 2x \cdot \sin 4x - \cos x \cdot \sin 5x = 0$

2) $\sin 5x \cdot \sin 4x + \cos 6x \cdot \cos 3x = 0$

3) $\cos 3x \cdot \cos 2x - \sin x \cdot \sin 6x = \cos 7x$

4) $\cos 9x - \cos 7x + \cos 3x - \cos x = 0$

5) $\sin x \cdot \sin 2x \cdot \sin 3x = \frac{1}{4}\sin 4x$

6) $\cos 2x = \sqrt{2}(\cos x - \sin x)$

7) $\sin 2x + \sin(-x) = 2\cos(-x) - 1$

8) $\sin x + \sin 2x = \cos x + 2\cos^2 x$

9) $(2\sin x - \cos x)(1 + \cos x) = \sin^2 x$

10) $\operatorname{tg} x \cdot \cos x + \operatorname{tg} x = \cos x + 1$

11) $\sin(x + 30°) + \cos(x + 60°) = 1 + \cos 2x$

12) $\cos\left(2x - \frac{7\pi}{2}\right) = \sin(4x + 3\pi)$

13) $\operatorname{ctg} x + \frac{\sin x}{1 + \cos x} = 2$

14) $2\sin^2\left(x - \frac{\pi}{4}\right) = 2\sin^2 x - \operatorname{tg} x$

15) $\operatorname{tg} 3x \cdot \sin 6x + \cos 6x - \cos 12x = 0$, найдите число решений на $[0; 2\pi]$.

16) $\operatorname{ctg} 2x \cdot \cos x + \sin x = \cos x$, найдите число решений на $[-\pi; 2\pi]$.

17) $\sin 6x + \sin 2x = \frac{1}{2}\operatorname{tg} 2x$

18) $1 - \sin x \cdot \cos x + \sin x - \cos x = 0$

19) $\operatorname{ctg} 2x \cdot \cos^2 x = \operatorname{ctg} 2x \cdot \sin^2 x$

20) $\cos^2 x+\cos^2 2x+\cos^2 3x+\cos^2 4x=2$

21) $\sin^2 3x+\sin^2 4x=\sin^2 5x+\sin^2 6x$

22) $\sin^2 2x+\sin^2 3x+\sin^2 4x+\sin^2 5x=2$, в ответе укажите число различных корней, принадлежащих отрезку $\left[0;\frac{\pi}{2}\right]$.

23) $\operatorname{tg} 3x-\operatorname{tg} x=0$

24) $\dfrac{\cos x-\cos 3x}{\sin x}=0$

25) $\dfrac{\sin x\cdot \operatorname{tg} 2x}{\cos 3x}=0$

26) $\left(\dfrac{1}{\sin^2 x}-1\right)\sqrt{4-x^2}=0$

27) $\left(2\cos^2\dfrac{x}{2}-1\right)\sqrt{25-4x^2}=0$

28) $\left(\cos\dfrac{\pi x}{2}-1\right)\log_5\left(100-x^2\right)=0$

29) $\sin\left(x-\dfrac{7\pi}{9}\right)\cdot\sin\left(x-\dfrac{4\pi}{9}\right)\cdot\sin\left(x-\dfrac{\pi}{9}\right)=0$

ОТВЕТЫ

1) πk; $\dfrac{\pi}{6}+\dfrac{\pi n}{3}$

2) $\dfrac{\pi}{2}(2k+1)$; $\dfrac{\pi}{4}(2n+1)$

3) $\dfrac{\pi k}{4}$; $\dfrac{\pi n}{3}$

4) $\dfrac{\pi}{6}+\dfrac{\pi k}{3}$; $\dfrac{\pi n}{5}$

5) $\dfrac{\pi k}{2}$; $\dfrac{\pi}{8}(1+2n)$

6) $\dfrac{\pi}{4}+\pi k$

7) $\dfrac{\pi}{2}+2\pi k$; $\pm\dfrac{\pi}{3}+2\pi n$

8) $\pm\dfrac{2\pi}{3}+2\pi k$; $\dfrac{\pi}{4}+\pi n$

9) $\pi+2\pi k$; $(-1)^n\dfrac{\pi}{6}+\pi n$

10) $\pi+2\pi k$; $\dfrac{\pi}{4}+\pi n$

11) $90°(2k+1)$; $60°(6n\pm1)$

12) $\pm\dfrac{\pi}{6}+\pi k$; $\dfrac{\pi n}{2}$

13) $(-1)^k\dfrac{\pi}{6}+\pi k$

14) $\pm\dfrac{\pi}{4}+\pi k$

15) 7

16) 3

17) $\dfrac{\pi k}{2}$; $\pm\dfrac{\pi}{6}+\pi n$

18) $-\dfrac{\pi}{2}+2\pi k$; $2\pi n$

19) $\dfrac{\pi}{4}+\dfrac{\pi k}{2}$

20) $\dfrac{\pi}{2}+\pi k$; $\dfrac{\pi}{4}+\dfrac{\pi n}{2}$; $\dfrac{\pi}{10}+\dfrac{\pi m}{5}$

21) $\dfrac{\pi k}{2}$; $\dfrac{\pi n}{9}$

22) 5

23) πk

24) $\dfrac{\pi}{2}+\pi k$

25) πk

26) $\left\{\pm\dfrac{\pi}{2}; \pm 2\right\}$

27) $\left\{\pm\dfrac{\pi}{2}; \pm\dfrac{5}{2}\right\}$

28) $\left\{0; \pm 4; \pm 8; \pm\sqrt{99}\right\}$

29) $\dfrac{\pi}{9}+\dfrac{\pi k}{3}$

***В ответах параметры** $k; n; m\in\mathbb{Z}$

<u>БЛОК 4</u>. Решите уравнения методом введения новой переменной:

А

1) $2\cos^2 x=3\sin x$

2) $2\sin^2\left(\dfrac{\pi}{2}+x\right)-5\cos(\pi-x)+2=0$

3) $\cos 2x-\cos x=2-\sin^2 x$

4) $6\sin x=3-8\cos^2 x$

5) $\operatorname{ctg} x=-4-3\operatorname{tg} x$

6) $\operatorname{tg}^2 x+3\operatorname{ctg}^2 x=4$

7) $2\cos^2 x-5\cos x=-3$

8) $5-5\cos\left(\dfrac{\pi}{2}-x\right)=2\cos^2(\pi-x)$

9) $3\cos 2x = 4 - 11\cos x$

10) $2\cos^2(x-\pi) + 3\sin(\pi + x) = 0$

11) $3\cos^2\left(\frac{\pi}{2} + x\right) - 2\cos x + 2\cos^2 x = 0$

12) $2\cos^2\left(x + \frac{\pi}{6}\right) - 3\sin\left(\frac{\pi}{3} - x\right) + 1 = 0$

13) $2\sin^2 x - 7\sin x \cdot \cos x + 6\cos^2 x = 0$

14) $3\sin^2 x + 4\cos^2 x = 13\sin x \cdot \cos x$

15) $2\sin^2 x - 5\sin x \cdot \cos x + 3\cos^2 x = 0$, найдите наименьшее решение уравнения, если $0° < x < 90°$.

16) $3\cos^2 x - \sin^2 x - \sin 2x = 0$

17) $\cos 2x(\cos 2x - 1) + \sin^2 x = \cos^2 x - 1$

18) $2\,\mathrm{tg}^2 x + 3 = \frac{3}{\cos x}$

19) $4\sin^4 x + 12\cos^2 x = 7$

20) $\frac{1}{\cos^2 x} + 4\,\mathrm{tg}\, x - 6 = 0$

21) $\frac{1}{\mathrm{tg}^2 x} - \frac{2}{\mathrm{tg}\, x} - 3 = 0$

ОТВЕТЫ

1) $(-1)^k \frac{\pi}{6} + \pi k$

2) $\pm\frac{2\pi}{3} + 2\pi k$

3) $\pi + 2\pi k$

4) $(-1)^{k+1} \frac{\pi}{6} + \pi k$

5) $-\frac{\pi}{4} + \pi k$; $-\mathrm{arctg}\,\frac{1}{3} + \pi n$

6) $\pm\frac{\pi}{4} + \pi k$; $\pm\frac{\pi}{3} + \pi n$

7) $2\pi k$

8) $\frac{\pi}{2}+2\pi k$

9) $\pm\frac{\pi}{3}+2\pi k$

10) $(-1)^k\frac{\pi}{6}+\pi k$

11) $2\pi k$

12) $-\frac{\pi}{6}+2\pi k$; $\pm\frac{\pi}{3}-\frac{\pi}{6}+2\pi n$

13) $\operatorname{arctg} 2+\pi k$; $\operatorname{arctg}\frac{3}{2}+\pi n$

14) $\operatorname{arctg} 4+\pi k$; $\operatorname{arctg}\frac{1}{3}+\pi n$

15) $45°$

16) $\frac{\pi}{4}+\pi k$; $\pi n-\operatorname{arctg} 3$

17) πk

18) $2\pi k$

19) $\frac{\pi}{4}+\frac{\pi k}{2}$

20) $\frac{\pi}{4}+\pi k$; $\pi n-\operatorname{arctg} 5$

21) $-\frac{\pi}{4}+\pi k$; $\operatorname{arctg}\frac{1}{3}+\pi n$

В

1) $3\sin\left(2x+\frac{3\pi}{2}\right)-5\sin x-1=0$

2) $\cos 2x-3\cos x=4\cos^2\frac{x}{2}$

3) $\sin^2\frac{\pi x}{3}+5\cos\frac{\pi x}{3}=5$, если $x\in[-10\pi;10\pi]$

4) $\sin 2x-\cos 4x=\frac{14}{\pi}\arcsin\left(\sin\frac{6\pi}{7}\right)$

5) $\cos 12x-2\sin^2 3x-1=0$

6) $\operatorname{tg} x+4\operatorname{ctg} x=\frac{4}{\sin x}$

7) $1+\sin^2 2x+\dfrac{4\operatorname{ctg} x}{1+\operatorname{ctg}^2 x}=0$

8) $7\operatorname{tg} x+\operatorname{ctg} x=\dfrac{5}{\cos x}$

9) $2\sin^2 x+\operatorname{tg}^2 x=2$

10) $3\left(\operatorname{ctg}^2 x-1\right)\cdot\operatorname{tg} 2x+4\operatorname{ctg}^2 x=10$

11) $\sin^2 x-\dfrac{3}{8}\cdot 7^{\log_7 \sin x}=\dfrac{1}{16}$

12) $\ln(\cos 2x)=\ln(\cos x)$

13) $6\cos^2 x-2\sin 2x=1$

14) $1+\sin x\cdot\cos x-3\cos^2 x=0$

15) $\cos 2x+\sin 2x+2\cos^2 x=0$

16) $\sin^4 x-6\sin^2 x\cdot\cos^2 x+5\cos^4 x=0$

17) $\left(\dfrac{2\operatorname{tg}\dfrac{x}{2}}{1+\operatorname{tg}^2\dfrac{x}{2}}\right)^2+2\sin 2x+3\cos^2 x=0$

18) $\sin^3 x-4\sin x\cdot\cos^2 x+3\cos^3 x=0$

19) $3\sin^2 x=\cos 2x+4\sin 2x$

20) $8\sin^2\dfrac{x}{2}+3\sin x-4=0$

21) $5\sin 2x-12(\sin x-\cos x)+12=0$ *Замена:* $a=\sin x-\cos x$

22) $5(\sin x+\cos x)+1+\sin 2x=0$ *Замена:* $a=\sin x+\cos x$

23) $3-\sin x\cdot\cos x+3\cos x=-3\sin x$

24) $4-\sin x\cdot\cos x+4\cos x=4\sin x$

25) $2\cos x-2\sin x+2=\dfrac{1}{\operatorname{tg} x+\operatorname{ctg} x}$

26) $\operatorname{tg}^2 x-3\operatorname{tg} x+4=3\operatorname{ctg} x-\operatorname{ctg}^2 x$ *Замена:* $a=\operatorname{tg} x+\operatorname{ctg} x$

27) $2+\dfrac{2}{\sqrt{3}}(\operatorname{tg} x-\operatorname{ctg} x)=\operatorname{tg}^2 x+\operatorname{ctg}^2 x$

28) $\operatorname{tg} x+1=2\sin(1{,}5\pi+2x)$

29) $\sin x+\operatorname{ctg}\dfrac{x}{2}=2$

30) $\cos x+\cos\dfrac{x}{2}=2\dfrac{1-\operatorname{tg}^2\dfrac{x}{2}}{1+\operatorname{tg}^2\dfrac{x}{2}}$

31) $1-\cos(\pi+x)+\sin\left(\dfrac{\pi+x}{2}\right)=3$

32) $2\cos 2x+2\operatorname{tg}^2 x=5$

33) $\sin^4 2x+\cos^4 2x=\sin 2x\cdot\cos 2x$

34) $\sin^4 x+\cos^4 x=\sin 2x-\dfrac{1}{2}$

35) $\sin^4 x+\cos^4 x-2\sin 2x+\dfrac{3}{4}\sin^2 2x=0$

ОТВЕТЫ

1) $(-1)^{k+1}\dfrac{\pi}{6}+\pi k$

2) $\pm\dfrac{2\pi}{3}+2\pi k$

3) $\{0;\pm 6;\pm 12;\pm 18;\pm 24;\pm 30\}$

4) $\dfrac{\pi}{4}+\pi k$

5) $\dfrac{\pi k}{3}$

6) $\pm\arccos\dfrac{1}{3}+2\pi k$

7) $-\frac{\pi}{4}+\pi k$

8) $(-1)^k \frac{\pi}{6}+\pi k$; $(-1)^n \arcsin\frac{1}{3}+\pi n$

9) $\frac{\pi}{4}+\frac{\pi k}{2}$

10) $\frac{\pi}{4}+\pi k$; $\pi-\operatorname{arcctg}\frac{5}{2}+\pi n$

11) $(-1)^k \frac{\pi}{6}+\pi k$

12) $2\pi k$

13) $\frac{\pi}{4}+\pi k$; $-\operatorname{arctg} 5+\pi n$

14) $\frac{\pi}{4}+\pi k$; $-\operatorname{arctg} 2+\pi n$

15) $-\frac{\pi}{4}+\pi k$; $\operatorname{arctg} 3+\pi n$

16) $\pm\frac{\pi}{4}+\pi k$; $\pm\operatorname{arctg}\sqrt{5}+\pi n$

17) $-\frac{\pi}{4}+\pi k$; $-\operatorname{arctg} 3+\pi n$

18) $\frac{\pi}{4}+\pi k$; $\operatorname{arctg}\left(\frac{-1\pm\sqrt{13}}{2}\right)+\pi n$

19) $\operatorname{arctg}\left(\frac{2\pm\sqrt{5}}{2}\right)+\pi k$

20) $2\pi k+2\operatorname{arctg}\frac{1}{2}$; $2\pi n-2\operatorname{arctg} 2$

21) $\pi+2\pi k$; $\frac{\pi}{2}+2\pi k$

22) $-\frac{\pi}{4}+\pi k$

23) $-\frac{\pi}{2}+2\pi k$; $\pi+2\pi k$

24) $\frac{\pi}{2}+2\pi k$; $\pi+2\pi k$

25) $\varnothing$

26) $\frac{\pi}{4}+\pi k$

27) $\frac{\pi}{4}+\frac{\pi k}{2}$; $\frac{\pi}{3}+\pi n$; $-\frac{\pi}{6}+\pi m$

28) $-\frac{\pi}{4}+\pi k$

29) $\frac{\pi}{2}+2\pi k$

30) $\frac{4\pi k}{3}$

31) $4\pi k$

32) $\pm\frac{\pi}{3}+\pi k$

33) $\frac{\pi}{8}+\frac{\pi k}{2}$

34) $\frac{\pi}{4}+\pi k$

35) $\frac{1}{2}\left((-1)^k \arcsin\left(4-2\sqrt{3}\right)\right)+\frac{\pi k}{2}$

***В ответах параметры** $k; n; m \in \mathbb{Z}$.

БЛОК 5. Решите уравнения мето ом вве ения вспомогательного угла

А

1) $\sqrt{3}\sin 2x - \cos 2x = 2$

2) $\sqrt{3}\sin x - \cos x = 1$

3) $\sin x + \cos x = 1$

4) $\sqrt{3}\sin x + \cos x = \sqrt{2}$, если $90° < x < 180°$

5) $\cos\frac{x}{2} - \sin\frac{x}{2} = \frac{\sqrt{2}}{2}$

6) $\sqrt{2}\sin x - \sqrt{2}\cos x = \sqrt{3}$

7) $\sin x - \cos x = \sqrt{\frac{3}{2}}$

8) $\sin\frac{x}{6} + \sqrt{3}\cos\frac{x}{6} + 1 = 0$

9) $\sqrt{3}\sin(2x - 30°) + \cos(2x - 30°) = 2$

10) $\sqrt{3}\sin x + \cos x = 1$, $x \in [-3\pi; 3\pi]$

В

11) $\sin x + 7\cos x = 5$

12) $8\sin x - 3\cos x = 4$

13) $4\cos x + 3\sin x = 2$

14) $\sin x - \sqrt{2}\cos x = \sqrt{3}$

15) $3\sin x - 2\cos x = 2$

16) $\sqrt{3}\sin x - 2\cos x = 1$

ОТВЕТЫ

1) $\frac{\pi}{3}+\pi k$

2) $\frac{\pi}{6}+(-1)^k\frac{\pi}{6}+\pi k$

3) $(-1)^k\frac{\pi}{4}-\frac{\pi}{4}+\pi k$

4) $105°$

5) $-\frac{\pi}{2}\pm\frac{2\pi}{3}+4\pi k$

6) $-\frac{\pi}{4}\pm\frac{5\pi}{6}+2\pi k$

7) $\frac{\pi}{4}+(-1)^k\frac{\pi}{3}+\pi k$

8) $-3\pi+12\pi k$; $5\pi+12\pi k$

9) $\frac{\pi}{4}+\pi k$

10) $\left\{-2\pi;\ -\frac{4\pi}{3};\ 0;\ \frac{2\pi}{3};\ 2\pi;\ \frac{8\pi}{3}\right\}$

11) $\pm\frac{\pi}{4}+\arcsin\frac{1}{\sqrt{50}}+2\pi k$

12) $(-1)^k\arcsin\frac{4}{\sqrt{73}}+\operatorname{arctg}\frac{3}{8}+\pi k$

13) $-\arcsin\frac{4}{5}+(-1)^k\arcsin\frac{2}{5}+\pi k$

14) $\frac{\pi}{2}+\operatorname{arctg}\sqrt{2}+2\pi k$

15) $\operatorname{arctg}\frac{2}{3}+(-1)^k\arcsin\frac{2}{\sqrt{13}}+\pi k$

16) $(-1)^k\arcsin\frac{\sqrt{7}}{7}+\pi k+\operatorname{arctg}\frac{2\sqrt{3}}{3}$

***В ответах параметр** $k\in\mathbb{Z}$.

БЛОК 6. Решите уравнения, используя функциональные методы:

В

1) $\cos^2 3x+\sin^2\left(\frac{x}{2}-\frac{\pi}{12}\right)=0$

2) $\operatorname{tg}^2 3x=\cos 2x-1$

3) $\sin^5 x+\cos^5 x=1$

4) $\sin 2x+\sin\left(x+\frac{\pi}{4}\right)=2$

5) $\cos 3x+\cos\frac{5x}{2}=2$

6) $\sin x+\sin 5x=2$

7) $\sin 3x+\cos 2x=-2$

8) $\cos x-2\sin\left(\frac{3\pi}{2}-\frac{x}{2}\right)=3$

9) $\sin 3x - 2\cos 2x = 3$

10) $\sin\left(x + \frac{\pi}{3}\right) \cdot \sin 4x = 1$

11) $\cos 3x \cdot \cos 2x = -1$

12) $\sin 2x \cdot \cos\left(x + \frac{\pi}{4}\right) = 1$

13) $\sin^2 2x + \sin^2 4x + \sin^2 6x = 0$

14) $\sin^4 x + \cos^7 x = 1$

ОТВЕТЫ

1) $\frac{\pi}{6} + 2\pi k$

2) πk

3) $\frac{\pi}{2} + 2\pi k$; $2\pi n$

4) $\frac{\pi}{4} + 2\pi k$

5) $4\pi k$

6) $\frac{\pi}{2} + 2\pi k$

7) $\frac{\pi}{2} + 2\pi k$

8) $4\pi k$

9) $-\frac{\pi}{2} + 2\pi k$

10) $\varnothing$

11) $\pi + 2\pi k$

12) $\frac{3\pi}{4} + 2\pi k$

13) $\frac{\pi k}{2}$

14) $\frac{\pi}{2} + \pi k$; $2\pi n$

***В ответах параметры** $k; n \in \mathbb{Z}$.

<u>БЛОК 7</u>. Решите уравнеиия, содержащие обратные тригонометричес функции:

А

1) $\frac{\pi}{24}(6x + 1) = \frac{1}{2}\operatorname{arc\,tg} 1 + \arccos\left(-\frac{1}{2}\right) - \arcsin\frac{\sqrt{2}}{2}$

2) $4\operatorname{arc\,tg}\frac{3x - 1}{x + 3} = \pi$

3) $3\arcsin\sqrt{x} - \pi = 0$

4) $\arccos\frac{x^2 - 6}{2x + 6} = \pi$

5) $3\arccos(2x+3)=\frac{5\pi}{2}$

6) $\cos(\arccos(4x-9))=x^2-5x+5$

7) $4\operatorname{arcctg}(x^2-9x+15)-\pi=0$

8) $\operatorname{tg}(\operatorname{arctg}(0,5-x))=x^2-4x+2,5$

9) $\arccos(x^2-2)=\pi$

10) $\arcsin\left(\operatorname{tg}\frac{\pi}{4}\right)-\arcsin\sqrt{\frac{3}{x}}-\frac{\pi}{6}=0$

11) $4\operatorname{arctg}(x^2-3x+3)=\pi$

12) $\arcsin(|x|-x)=\frac{\pi}{6}$

13) $\arccos(x+|x|)=\frac{\pi}{2}$

14) $\operatorname{arcctg}(\operatorname{ctg}(4x^2-10x-10))=x^2-3x$

15) $\arcsin\left(\sin\frac{8\pi}{7}\right)=2x-1$

16) $\arcsin\left(\sin\frac{2}{x}\right)=\sqrt{x+2}-1$

17) $\arccos(1-x)=\frac{\pi}{2}$

18) $\cos 2x\cdot\arcsin x=0$

19) $\operatorname{tg}4x\cdot\operatorname{arcctg}(\pi+3x)=0$

20) $\sin(4\operatorname{arctg}x)=1$

ОТВЕТЫ

1) 2	2) 2	3) 0,75	4) $-2;\ 0$	5) $\frac{-6-\sqrt{3}}{4}$
6) 2	7) 2; 7	8) 1; 2	9) ± 1	10) 4
11) 1; 2	12) $-0,25$	13) $(-\infty; 0]$	14) $3\frac{1}{3}$	15) $\frac{7-\pi}{14}$
16) ± 2	17) 1	18) $\pm\frac{\pi}{4};\ 0$	19) $\frac{\pi k}{4};\ -\frac{\pi}{6}$	20) $-1\pm\sqrt{2}$

В

1) $\arcsin\left(3x^2-4x-1\right)=\arcsin(x+1)$

2) $\arcsin(1+2x)=\arcsin\left(2x^2-x-1\right)$

3) $\arcsin\left(x^2-4\right)=\arcsin(2x+4)$

4) $\arccos(3x-16)=\arccos\left(x^2-26\right)$

5) $\arcsin\left(x^2\right)=\arcsin(7x+8)$

6) $\left(x^2-5x+6\right)\cdot\arcsin\frac{x}{2}=0$

7) $2(\arcsin x)^2+\pi^2=3\pi\arcsin x$

8) $2(\arcsin x)^2-5\arcsin x+2=0$

9) $2(\arccos x)^2+3\arccos x=2$

10) $3(\operatorname{arctg} x)^2=10\operatorname{arctg} x-3$

11) $12\left(\operatorname{arctg}\frac{x}{2}\right)^2=\pi\left(3\pi+5\operatorname{arctg}\frac{x}{2}\right)$

12) $\arccos 4x = \arcsin 3x$

13) $\arccos \frac{3x+1}{5} = \arcsin \frac{x+2}{5}$

14) $\arcsin 6x = \arccos 8x$

15) $\arccos x = \operatorname{arctg} x$

16) $\operatorname{arctg} x = \arccos \frac{5}{13}$

17) $\arcsin 5x = \operatorname{arcctg} 6x$

18) $\arcsin \frac{\sqrt{3x+2}}{2} = \operatorname{arcctg} \sqrt{\frac{2}{x+1}}$

19) $\arccos x - 2\arcsin x = 0$

20) $\arccos x - \arcsin x = \arccos \frac{\sqrt{3}}{2}$

21) $\operatorname{arctg} 3x - \operatorname{arcctg} 3x = \frac{\pi}{4}$

22) $\arccos 3x - \arcsin 3x = \frac{\pi}{6}$

23) $2\operatorname{arctg} x + 3\operatorname{arcctg} x = 5$

24) $4\operatorname{arctg} x - 6\operatorname{arcctg} x = \pi$

25) $(\arcsin x)^2 + (\arccos x)^2 = \frac{5\pi^2}{36}$

26) $\arcsin x \cdot \arccos x = \frac{\pi^2}{18}$

27) $\arccos(4x^2 - x) - \arcsin(4x^2 - x) = \frac{\pi}{6}$

28) $\arcsin(x-1)\cdot\arccos(x-1)=\frac{\pi^2}{18}$

29) $\operatorname{arctg} x\cdot\operatorname{arcctg} x=-\frac{5\pi^2}{18}$

30) $\frac{\operatorname{arctg}(x+1)}{\operatorname{arcctg}(x+1)}=\frac{1}{2}$

31) $\operatorname{arcctg}(x-2)=\operatorname{arctg}(2x-1)$

ОТВЕТЫ

1) $-\frac{1}{3}$	2) $-0,5$	3) -2	4) 5
5) -1	6) 0; 2	7) 1	8) $\sin\frac{1}{2}$
9) $\cos\frac{1}{2}$	10) $\operatorname{tg}\frac{1}{3}$	11) $-2\sqrt{3}$	12) 0,2
13) 1	14) 0,1	15) $\sqrt{\frac{\sqrt{5}-1}{2}}$	16) $\frac{12}{5}$
17) $\frac{\sqrt{5}}{15}$	18) $-\frac{1}{3}$	19) 0,5	20) 0,5
21) $\frac{\sqrt{2}+1}{3}$	22) $\frac{1}{6}$	23) $\operatorname{ctg} 5$	24) $\operatorname{tg}\frac{2\pi}{5}$
25) $\frac{1}{2}$; $\frac{\sqrt{3}}{2}$	26) $\frac{1}{2}$; $\frac{\sqrt{3}}{2}$	27) $-\frac{1}{4}$; $\frac{1}{2}$	28) 1,5; $1+\frac{\sqrt{3}}{2}$
29) $-\sqrt{3}$	30) $\frac{1}{\sqrt{3}}-1$	31) $\frac{5+\sqrt{17}}{4}$	

БЛОК 8. Решите уравнения:

С

1) $\operatorname{tg} x = \dfrac{-\sin x}{\sqrt{1-\sin^2 x}}$, найдите наибольшее целое решение, удовлетворяющее условиям $90° < x < 270°$.

2) $\sqrt{1-\sin^2 x} = -\cos x$, найдите наименьшее целое решение, удовлетворяющее условиям $90° < x < 270°$.

3) $7 + \dfrac{4\sin x}{\cos^{-1} x} + 3\cos^{-1}(90° - 2x) = 0$, найдите число различных решений на отрезке $[0°; 360°]$.

4) $\sin^2 3x - \cos(180° - x) + \cos^2 3x + \sin\left(90° + \dfrac{x}{2}\right) = 0$, найдите число различных решений на отрезке $[0°; 720°]$.

5) $2\sin^2 x = 4\sin^2 2x + 7\cos 2x - 6$

6) $2\cos^2 4x - 6\cos^2 2x + 1 = 0$

7) $\cos 4x + 2\cos^2 x = 0$

8) $\cos^3 x + \sin^3 x = \cos x + \sin x$

9) $\operatorname{tg} x - \sin x = 1 - \operatorname{tg} x \cdot \sin x$

10) $\sin x + \operatorname{tg} x = \dfrac{\sin^2 x}{\sin 2x}$

11) $\sin\left(2x - \dfrac{7\pi}{2}\right) + \sin\left(\dfrac{3\pi}{2} - 8x\right) + \cos 6x = 1$, в ответе укажите наименьший положительный корень.

12) $5^{2+\cos 2x} - 26 \cdot 5^{\cos^2 x} + 5 = 0$

13) Сколько корней имеет уравнение $\dfrac{|\cos x|}{\cos x} = \cos 2x - 1$ на отрезке $[\pi; 2\pi]$?

14) $\cos^2\left(\dfrac{\pi x}{6}\right)+\sqrt{2x^2-5x-3}=0$

15) $4\cos^2 x+\sin x\cdot\cos x+3\sin^2 x=3$, найдите сумму корней уравнения, если $x\in[90°;180°]$.

16) $\sin^2 x+\sin^2 2x=\sin^2 3x$

17) $\dfrac{\cos 2x-\sin x-1}{2\cos x-\sqrt{3}}=0$

18) $\dfrac{\operatorname{ctg}^2\left(\dfrac{\pi}{2}-x\right)-\sqrt{3}\operatorname{tg} x}{2\cos x-1}=0$

19) $\operatorname{ctg} x\cdot|\sin x|=0,5$

20) $|\sin x|+\sqrt{3}\cos x=0$

21) $\dfrac{\log_2(2\sin x)}{\sqrt{-3\cos x}}=0$

22) $\log_{\cos x}\sin x=1$

23) $\operatorname{tg}^2 x\cdot\sin 2x-1=2\sin 2x-\cos 2x$

24) $\operatorname{tg} 6x\cdot\cos 2x-\sin 2x-2\sin 4x=0$

25) $\dfrac{1-\cos 2x+\operatorname{tg} x}{1-\operatorname{tg} x}=1+\sin 2x$

26) $\arcsin x+\arcsin\dfrac{x}{\sqrt{3}}=\dfrac{\pi}{2}$

27) $\arcsin 2x-\arcsin x=\dfrac{\pi}{3}$

28) $\arccos 2x-\arccos\left(2\sqrt{3}x\right)=\dfrac{\pi}{6}$

29) $\arccos\left(4x^2-3x-2\right)+\arccos\left(3x^2-8x-4\right)=\pi$

30) $\operatorname{arctg}(4-x)+\operatorname{arctg}(x-3)=\dfrac{\pi}{4}$

31) $\arccos\dfrac{x}{2}=2\operatorname{arctg}(x-1)$

32) $2\arccos x+\arccos(1-x)=\pi$

33) $\operatorname{arctg}2x+\operatorname{arctg}3x=\dfrac{3\pi}{4}$

34) $\operatorname{arctg}3^{x}-\operatorname{arctg}3^{-x}=\dfrac{\pi}{6}$

ОТВЕТЫ

1) 269°

2) 91°

3) 4

4) 4

5) $\pm\dfrac{\pi}{6}+\pi k$

6) $\pm\dfrac{\pi}{6}+\dfrac{\pi k}{2}$

7) $\dfrac{\pi}{4}+\dfrac{\pi k}{2}$; $\pm\dfrac{\pi}{3}+\pi n$

8) $-\dfrac{\pi}{4}+\pi k$; $\dfrac{\pi n}{2}$

9) $\dfrac{\pi}{4}+\pi k$

10) $\pm\dfrac{2\pi}{3}+2\pi k$

11) 22°30′

12) πk

13) 1

14) $x=3$

15) 225°

16) $\dfrac{\pi}{6}+\dfrac{\pi k}{3}$; $\dfrac{\pi n}{2}$

17) πk; $-\dfrac{5\pi}{6}+2\pi n$

18) πk; $-\dfrac{2\pi}{3}+2\pi n$

19) $-\dfrac{2\pi}{3}+2\pi k$; $\dfrac{\pi}{3}+2\pi n$

20) $\dfrac{2\pi}{3}+2\pi k$; $\dfrac{4\pi}{3}+2\pi n$

21) $\dfrac{5\pi}{6}+2\pi k$

22) $\dfrac{\pi}{4}+2\pi k$

23) πk; $-\frac{\pi}{4}+\pi n$; $\operatorname{arc\,tg} 2+\pi m$

24) $\frac{\pi k}{4}$; $\pm\frac{\pi}{18}+\frac{\pi n}{3}$

25) $-\frac{\pi}{4}+\pi k$; $\operatorname{arc\,tg}\frac{1}{2}+\pi n$

26) $\frac{\sqrt{3}}{2}$

27) 0,5

28) 0,25

29) $-\frac{3}{7}$

30) 3; 4

31) $\sqrt{2}$

32) 0; $\frac{1}{2}$

33) 1

34) 0,5

***В ответах параметры** $k; n; m \in \mathbb{Z}$.

§ 3. РЕШЕНИЕ ТРИГОНОМЕТРИЧЕСКИХ НЕРАВЕНСТВ

Б. ЮК 1. Решите простейшие тригонометрические неравенства:

А

1) $\sin x < \frac{\sqrt{2}}{2}$

2) $\operatorname{ctg} x \le 0$

3) $2\cos x < -\sqrt{2}$

4) $\sqrt{3}\operatorname{tg} x < 1$

5) $\sqrt{3} - 2\cos x \ge 0$

6) $\operatorname{tg} x \ge -\sqrt{3}$

7) $\sin x \le \frac{\sqrt{3}}{2}$

8) $\sin x > -\frac{1}{2}$

9) $\cos x \ge -\frac{1}{\sqrt{2}}$

10) $\cos x < \frac{\sqrt{2}}{2}$

11) $\sin x \ge \frac{\sqrt{3}}{2}$

12) $2\cos 2x \ge 1$

В

13) $\operatorname{tg}\left(x + \frac{\pi}{4}\right) \ge 1$

14) $2\sin\left(x - \frac{\pi}{3}\right) \le \sqrt{3}$

15) $\cos^2 x - \sin^2 x \ge \frac{1}{2}$

16) $2\sin\left(2x - \frac{\pi}{3}\right) \ge -1$

17) $\cos^2 x - \sin^2 x \le -\frac{\sqrt{3}}{2}$

18) $\sin(2x - 1) > -\frac{1}{\sqrt{2}}$

19) $0 < \cos x \le \frac{1}{2}$

20) Найдите область определения функции $y = \sqrt{\operatorname{ctg} x - 1}$.

21) Решите систему $\begin{cases} \cos x = -\frac{1}{2} \\ \sin x > 0 \end{cases}$ и найдите сумму ее решений, принадлежащих промежутку $[0; 4\pi]$.

22) $\operatorname{tg}\frac{x}{4} < 0$

23) $|\operatorname{ctg} x| < \sqrt{3}$

24) $\operatorname{tg} 2x \geq 1$

25) $|\sin x| \leq \frac{\sqrt{2}}{2}$

26) $\log_{\frac{1}{2}} \sin x > 1$

27) $\operatorname{ctg}\left(x + \frac{\pi}{3}\right) < -1$

28) $|\operatorname{tg} x| \geq \sqrt{3}$

29) $\operatorname{tg}^2 x \geq \frac{1}{3}$

30) $\sin\left(\frac{3x}{2} + \frac{\pi}{12}\right) < \frac{1}{\sqrt{2}}$

31) $|\cos x| \geq \frac{\sqrt{2}}{2}$

32) $|\sin x| \leq \frac{\sqrt{3}}{2}$

ОТВЕТЫ

1) $\left(-\frac{5\pi}{4} + 2\pi n; \frac{\pi}{4} + 2\pi n\right)$

2) $\left[\frac{\pi}{2} + \pi n; \pi + \pi n\right)$

3) $\left(\frac{3\pi}{4} + 2\pi n; \frac{5\pi}{4} + 2\pi n\right)$

4) $\left(-\frac{\pi}{2} + \pi n; \frac{\pi}{6} + \pi n\right)$

5) $\left[\frac{\pi}{6} + 2\pi n; \frac{11\pi}{6} + 2\pi n\right]$

6) $\left[-\frac{\pi}{3} + \pi n; \frac{\pi}{2} + \pi n\right)$

7) $\left[-\frac{4\pi}{3} + 2\pi n; \frac{\pi}{3} + 2\pi n\right]$

8) $\left(-\frac{\pi}{6} + 2\pi n; \frac{7\pi}{6} + 2\pi n\right)$

9) $\left[-\frac{3\pi}{4} + 2\pi n; \frac{3\pi}{4} + 2\pi n\right]$

10) $\left(\frac{\pi}{4} + 2\pi n; \frac{7\pi}{4} + 2\pi n\right)$

11) $\left[\frac{\pi}{3} + 2\pi n; \frac{2\pi}{3} + 2\pi n\right]$

12) $\left[-\frac{\pi}{6} + \pi n; \frac{\pi}{6} + \pi n\right]$

13) $\left[\pi n; \frac{\pi}{4} + \pi n\right)$

14) $\left[-\pi + 2\pi n; \frac{2\pi}{3} + 2\pi n\right]$

15) $\left[-\frac{\pi}{6}+\pi n; \frac{\pi}{6}+\pi n\right]$

16) $\left[\frac{\pi}{12}+\pi n; \frac{3\pi}{4}+\pi n\right]$

17) $\left[\frac{5\pi}{12}+\pi n; \frac{7\pi}{12}+\pi n\right]$

18) $\left(-\frac{\pi}{8}+\frac{1}{2}+\pi n; \frac{5\pi}{8}+\frac{1}{2}+\pi n\right)$

19) $\left(-\frac{\pi}{2}+2\pi n; -\frac{\pi}{3}+2\pi n\right]\cup\left[\frac{\pi}{3}+2\pi n; \frac{\pi}{2}+2\pi n\right)$

20) $\left(\pi n; \frac{\pi}{4}+\pi n\right]$

21) $\frac{10\pi}{3}$

22) $(-2\pi+4\pi n;\ 4\pi n)$

23) $\left(\frac{\pi}{6}+\pi n; \frac{5\pi}{6}+\pi n\right)$

24) $\left[\frac{\pi}{8}+\frac{\pi n}{2}; \frac{\pi}{4}+\frac{\pi n}{2}\right)$

25) $\left[-\frac{\pi}{4}+\pi n; \frac{\pi}{4}+\pi n\right]$

26) $\left(2\pi n; \frac{\pi}{6}+2\pi n\right)\cup\left(\frac{5\pi}{6}+2\pi n; \pi+2\pi n\right)$

27) $\left(\frac{5\pi}{12}+\pi n; \frac{2\pi}{3}+\pi n\right)$

28) $\left(-\frac{\pi}{2}+\pi n; -\frac{\pi}{3}+\pi n\right]\cup\left[\frac{\pi}{3}+\pi n; \frac{\pi}{2}+\pi n\right)$

29) $\left(-\frac{\pi}{2}+\pi n; -\frac{\pi}{6}+\pi n\right]\cup\left[\frac{\pi}{6}+\pi n; \frac{\pi}{2}+\pi n\right)$

30) $\left(-\frac{8\pi}{9}+\frac{4\pi n}{3}; \frac{\pi}{9}+\frac{4\pi n}{3}\right)$

31) $\left[-\frac{\pi}{4}+\pi n; \frac{\pi}{4}+\pi n\right]$

32) $\left[-\frac{\pi}{3}+\pi n; \frac{\pi}{3}+\pi n\right]$

***В ответах параметр** $n\in\mathbb{Z}$

БЛОК 2. **Решите тригонометрические неравенства с применением основных тригонометрических формул:**

А

1) $1-4\sin^2 x<0$

2) $3-4\cos^2 x<0$

3) $\cos 3x\cdot\cos x+\sin 3x\cdot\sin x\geq\frac{1}{2}$

4) $2\sin^2 2x<1$

5) $\sin 3x\cdot\cos x+\cos 3x\cdot\sin x\geq\frac{1}{2}$

6) $\sin x\cdot\cos x>0$

7) $2\cos 5x\cdot\cos 4x+2\sin 5x\cdot\sin 4x<\sqrt{3}$

В

8) $\sin x+\sqrt{3}\cos x>0$

9) $\sin x>\cos x$

10) $(1+\cos 4x)\sin 2x\geq\cos^2 2x$

11) $4\cos x-\sin 2x>0$

12) $3\sin x+\sin 2x<0$

13) $\sin^4\frac{x}{3}+\cos^4\frac{x}{3}>\frac{1}{2}$

14) $\left(\sin\frac{x}{2}-\cos\frac{x}{2}\right)^2<\sin x$

15) $\sin\left(x+\frac{\pi}{6}\right)\cdot\cos\left(x+\frac{\pi}{6}\right)>\frac{1}{4}$

16) $2\cos^2 x<\sqrt{2}+2\sin^2 x$

ОТВЕТЫ:

1) $\left(\frac{\pi}{6}+\pi n;\frac{5\pi}{6}+\pi n\right)$

2) $\left(-\frac{\pi}{6}+\pi n;\frac{\pi}{6}+\pi n\right)$

3) $\left[-\frac{\pi}{6}+\pi n;\frac{\pi}{6}+\pi n\right]$

4) $\left(-\frac{\pi}{8}+\frac{\pi n}{2};\frac{\pi}{8}+\frac{\pi n}{2}\right)$

5) $\left[\frac{\pi}{24}+\frac{\pi n}{2};\frac{5\pi}{24}+\frac{\pi n}{2}\right]$

6) $\left(\pi n;\frac{\pi}{2}+\pi n\right)$

7) $\left(\frac{\pi}{6}+2\pi n; \frac{11\pi}{6}+2\pi n\right)$

8) $\left(-\frac{\pi}{3}+2\pi n; \frac{2\pi}{3}+2\pi n\right)$

9) $\left(\frac{\pi}{4}+2\pi n; \frac{5\pi}{4}+2\pi n\right)$

10) $\left[\frac{\pi}{12}+\pi n; \frac{5\pi}{12}+\pi n\right]\cup\left\{\frac{3\pi}{4}+\pi k\right\}$

11) $\left(-\frac{\pi}{2}+2\pi n; \frac{\pi}{2}+2\pi n\right)$

12) $(-\pi+2\pi n;\ 2\pi n)$

13) $x \neq \frac{3\pi}{4}+\frac{3\pi n}{2}$

14) $\left(\frac{\pi}{6}+2\pi n; \frac{5\pi}{6}+2\pi n\right)$

15) $\left(-\frac{\pi}{12}+\pi n; \frac{\pi}{4}+\pi n\right)$

16) $\left(\frac{\pi}{8}+\pi n; \frac{7\pi}{8}+\pi n\right)$

***В ответах параметры** $n, k \in \mathbb{Z}$

Б ЛОК 3. Решите тригонометрические неравенства методом введения новой переменной:

В

1) $\cos 2x+5\cos x+3 \geq 0$

2) $2\sin^2 x-7\sin x+3>0$

3) $\sin x+\cos 2x>1$

4) $3\sin^2 2x+7\cos 2x-3 \geq 0$

5) $3\sin^2 x-2\sin x\cdot\cos x-\cos^2 x \leq 0$

6) $3\cos 2x+2\cos x \geq 5$

7) $3\sin x>2\cos^2 x$

8) $\mathrm{tg}^3 x+\mathrm{tg}^2 x-\mathrm{tg}\, x-1<0$

9) $2\sin^2 x+\sqrt{3}\sin x-3>0$

10) $\mathrm{ctg}^2 x+\mathrm{ctg}\, x \geq 0$

11) $2\cos^4 x-3\cos^2 x+1>0$

12) $2\sin^2 x-3\sin x+1<0$

13) $\cos 2x<\cos 4x$

14) $2\sin^2 x+\sin 2x-4\cos^2 x>0$

15) $\dfrac{2}{\cos^2 x} - \operatorname{tg} x - 3 < 0$

16) $\cos 2x + 5\sin x + 2 \geq 0$

ОТВЕТЫ:

1) $\left[-\dfrac{2\pi}{3} + 2\pi n; \dfrac{2\pi}{3} + 2\pi n\right]$

2) $\left(-\dfrac{7\pi}{6} + 2\pi n; \dfrac{\pi}{6} + 2\pi n\right)$

3) $\left(2\pi n; \dfrac{\pi}{6} + 2\pi n\right) \cup \left(\dfrac{5\pi}{6} + 2\pi n; \pi + 2\pi n\right)$

4) $\left[-\dfrac{\pi}{4} + \pi n; \dfrac{\pi}{4} + \pi n\right]$

5) $\left[-\operatorname{arc\,tg}\dfrac{1}{3} + \pi n; \dfrac{\pi}{4} + \pi n\right]$

6) $x = 2\pi n$

7) $\left(\dfrac{\pi}{6} + 2\pi n; \dfrac{5\pi}{6} + 2\pi n\right)$

8) $\left(-\dfrac{\pi}{2} + \pi n; -\dfrac{\pi}{4} + \pi n\right) \cup \left(-\dfrac{\pi}{4} + \pi k; \dfrac{\pi}{4} + \pi k\right)$

9) $\left(\dfrac{\pi}{3} + 2\pi n; \dfrac{2\pi}{3} + 2\pi n\right)$

10) $\left[\dfrac{3\pi}{4} + \pi n; \pi + \pi n\right) \cup \left(\pi k; \dfrac{\pi}{2} + \pi k\right]$

11) $\left(\dfrac{\pi}{4} + \pi n; \dfrac{3\pi}{4} + \pi n\right)$

12) $\left(\dfrac{\pi}{6} + 2\pi n; \dfrac{\pi}{2} + 2\pi n\right) \cup \left(\dfrac{\pi}{2} + 2\pi n; \dfrac{5\pi}{6} + 2\pi n\right)$

13) $\left(\dfrac{\pi}{3} + \pi n; \dfrac{2\pi}{3} + \pi n\right)$

14) $\left[-\dfrac{\pi}{2} + \pi n; -\operatorname{arc\,tg} 2 + \pi n\right) \cup \left(\dfrac{\pi}{4} + \pi k; \dfrac{\pi}{2} + \pi k\right]$

15) $\left(-\operatorname{arc\,tg}\frac{1}{2}+\pi n;\ \frac{\pi}{4}+\pi n\right)$ 16) $\left[-\frac{\pi}{6}+2\pi n;\ \frac{7\pi}{6}+2\pi n\right]$

***В ответах параметр** $n \in \mathbb{Z}$

БЛОК 4. Решите тригонометрические неравенства:

С

1) $\operatorname{tg}\left(2x-\frac{\pi}{6}\right)<-\sqrt{3}$ на $\left[-\frac{3}{8};\frac{21}{8}\right]$

2) $2\sin^2\left(x+\frac{\pi}{4}\right)+\sqrt{3}\cos 2x>0$

3) $|\sin x| \geq |\cos x|$

4) $\sqrt{\cos^2\left(\frac{\pi}{3}-\frac{x}{3}\right)}<\frac{1}{2}$

5) $\sin^6 x+\cos^6 x \geq \frac{5}{8}$

6) $\sin 3x(\cos 2x+1) \geq 0$

7) $\sin 3x-2\sin x \leq 0$

8) $\cos x \cdot \cos 7x > \cos 3x \cdot \cos 5x$

9) $\begin{cases} \sin x<\frac{\sqrt{3}}{2} \\ \cos x>-\frac{\sqrt{2}}{2} \end{cases}$

10) $\left[\begin{array}{l} \sin x>\frac{2}{3} \\ \cos x<0 \end{array}\right.$

11) $2+\operatorname{tg}2x+\operatorname{ctg}2x<0$

12) $2\sin^2 3x+\sin^2 6x<2$

13) $\sin x \le \dfrac{3a-6}{a+1}$, найдите, при каких значениях a неравенство не име решений.

14) $\left(-2x^2+5x-7\right)\left(3\operatorname{tg}^2 x-1\right)\ge 0$

15) Найдите сумму наибольшего и наименьшего решений двойного неравенства $1\le \dfrac{\operatorname{tg}3x+\operatorname{tg}x}{1-\operatorname{tg}3x\cdot\operatorname{tg}x}\le\sqrt{3}$, которые находятся на промежутке $(0;\pi)$

16) $\left(\cos x+\dfrac{\pi}{2}\right)\left(\sin x-\dfrac{\pi}{3}\right)\left(\operatorname{tg}^2 x-\dfrac{1}{3}\right)\ge 0$

17) $\sin 2x(\cos 3x-1)<0$

18) $\sin 2x\cdot\sin 3x-\cos 2x\cdot\cos 3x>\sin 10x$

19) $\dfrac{5}{4}\sin^2 x+\dfrac{1}{4}\sin^2 2x>\cos 2x$

20) $\cos\left(4x+\dfrac{5\pi}{2}\right)\le\cos^4 x-\sin^4 x$

ОТВЕТЫ:

1) $\left[-\dfrac{3}{8};-\dfrac{\pi}{12}\right)\cup\left(\dfrac{\pi}{3};\dfrac{5\pi}{12}\right)\cup\left(\dfrac{5\pi}{6};2\dfrac{5}{8}\right]$

2) $\left(-\dfrac{\pi}{4}+\pi n;\dfrac{5\pi}{12}+\pi n\right)$

3) $\left[\dfrac{\pi}{4}+\pi n;\dfrac{3\pi}{4}+\pi n\right]$

4) $(2\pi+3\pi n;\ 3\pi+3\pi n)$

5) $\left[-\frac{\pi}{8}+\frac{\pi n}{2};\frac{\pi}{8}+\frac{\pi n}{2}\right]$

6) $\left[\frac{2\pi n}{3};\frac{\pi}{3}+\frac{2\pi n}{3}\right]\cup\left\{\frac{\pi}{2}+\pi n\right\}$

7) $\left[-\frac{\pi}{6}+2\pi n;2\pi n\right]\cup\left[\frac{\pi}{6}+2\pi n;\frac{5\pi}{6}+2\pi n\right]\cup\left[\pi+2\pi n;\frac{7\pi}{6}+2\pi n\right]$

8) $\left(\frac{\pi}{4}+\pi n;\frac{\pi}{2}+\pi n\right)\cup\left(\frac{\pi}{2}+\pi n;\frac{3\pi}{4}+\pi n\right)$

9) $\left(-\frac{3\pi}{4}+2\pi n;\frac{\pi}{3}+2\pi n\right)\cup\left(\frac{2\pi}{3}+2\pi n;\frac{3\pi}{4}+2\pi n\right)$

10) $\left(\arcsin\frac{2}{3}+2\pi n;\frac{3\pi}{2}+2\pi n\right)$

11) $\left(-\frac{\pi}{4}+\frac{\pi n}{2};-\frac{\pi}{8}+\frac{\pi n}{2}\right)\cup\left(-\frac{\pi}{8}+\frac{\pi n}{2};\frac{\pi n}{2}\right)$

12) $\left(-\frac{\pi}{12}+\frac{\pi n}{3};\frac{\pi}{12}+\frac{\pi n}{3}\right)$

13) $\left(-1;\frac{5}{4}\right)$

14) $\left[-\frac{\pi}{6}+\pi n;\frac{\pi}{6}+\pi n\right]$

15) $\frac{43\pi}{48}$

16) $\left[-\frac{\pi}{6}+\pi n;\frac{\pi}{6}+\pi n\right]$

17) $\left(2\pi n;\frac{\pi}{2}+2\pi n\right)\cup\left(\pi+2\pi n;\frac{4\pi}{3}+2\pi n\right)\cup\left(\frac{4\pi}{3}+2\pi n;\frac{3\pi}{2}+2\pi n\right)$

18) $\left(-\frac{\pi}{10}+\frac{2\pi n}{5};-\frac{\pi}{30}+\frac{2\pi n}{5}\right)\cup\left(\frac{\pi}{10}+\frac{2\pi n}{5};\frac{7\pi}{30}+\frac{2\pi n}{5}\right)$

19) $\left(\frac{\pi}{6}+\pi n;\frac{5\pi}{6}+\pi n\right)$

20) $\left[-\frac{\pi}{12}+\pi n;\frac{\pi}{4}+\pi n\right]\cup\left[\frac{7\pi}{12}+\pi n;\frac{3\pi}{4}+\pi n\right]$

***В ответах параметры** $n, k\in\mathbb{Z}$

ГЛАВА V. РЕШЕНИЕ ЗАДАЧ, СВЯЗАННЫХ С ПРОГРЕССИЕЙ

§ 1. АРИФМЕТИЧЕСКАЯ ПРОГРЕССИЯ

БЛОК 1. Формула n-го члена арифметической прогрессии

1. Найдите номер члена арифметической прогрессии, равного 47, если $a_4 = -3$, $d = 5$.

Ответ: 14.

2. Найдите первый член арифметической прогрессии, если $a_6 = 23$, $a_{11} = 48$.

Ответ: -2.

3. В арифметической прогрессии 10 членов. Сумма членов с четными номерами равна 25, а сумма членов с нечетными номерами равна 10. Найдите седьмой член прогрессии.

Ответ: 8.

4. Найдите обозначенные буквами члены арифметической прогрессии a_1, a_2, 15, a_4, a_5, 33, a_7, ... В ответе укажите $a_1 \cdot a_7$.

Ответ: 117.

5. Первый член арифметической прогрессии равен 2, второй и третий соответственно равны квадратам двух последовательных натуральных чисел. Найдите разность этой прогрессии.

Ответ: 7.

6. Известно, что x_1 и x_2 – корни уравнения $x^2 - 4x + a = 0$; x_3 и x_4 – корни уравнения $x^2 - 12x + b = 0$. Числа x_1, x_2, x_3, x_4 – арифметическая прогрессия. Найдите $a \cdot b$.

Ответ: 105.

7. Сумма второго, четвертого и шестого членов возрастающей арифметической прогрессии равна 15, а сумма квадратов третьего и пятого членов этой же прогрессии равна 58. Определите седьмой член этой прогрессии.

Ответ: 11.

8. Сумма первых трех членов арифметической прогрессии равна 30, а сумма квадратов первого и второго членов этой же прогрессии равна 116. Найдите первый член этой прогрессии, если известно, что ее пятый член делится нацело на 13.

Ответ: -4.

9. Сумма трех чисел равна $0,6(1)$, а сумма обратных им чисел составляющих арифметическую прогрессию, равна 18. Найдите эти числа.

Ответ: $\frac{1}{3}$; $\frac{1}{6}$; $\frac{1}{9}$.

10. Произведение второго и третьего членов убывающей арифметической прогрессии равно 21, а сумма первых семи членов этой же прогрессии равна (-7). Определите пятый член прогрессии.

Ответ: -5.

11. Сумма трех чисел, образующих арифметическую прогрессию, равна 111. Второе число больше первого в 5 раз. Найдите первое число.

Ответ: 7,4.

12. В арифметической прогрессии $\begin{cases} a_2 + a_5 - a_3 = 10, \\ a_1 + a_6 = 17. \end{cases}$ Найдите a_1.

Ответ: 1.

13. В арифметической прогрессии с положительными членами $\begin{cases} a_7 - a_3 = 8, \\ a_2 \cdot a_7 = 75. \end{cases}$ В ответе укажите $(3d - 2a_1)$.

Ответ: 0.

14. В арифметической прогрессии $(d > 0)$ $\begin{cases} a_3 \cdot a_4 = 80, \\ \dfrac{a_2}{a_5} = 2. \end{cases}$

Определите, сколько в этой прогрессии членов, модуль которых не превосходит 10.

Ответ: 11.

15. От деления тринадцатого члена арифметической прогрессии на третий член в частном получается 3, а от деления восемнадцатого члена на седьмой член в частиом получается 2 и в остатке 8. Определите a_1 и d.

Ответ: 12; 4.

16. В арифметической прогрессии $\begin{cases} a_2 + a_4 = 16, \\ a_1 \cdot a_5 = 28. \end{cases}$

Найдите a_1, d.

Ответ: 2; 3 или 14; -3.

17. Между числами 8 и 26 вставьте пять чисел, которые вместе с данными числами составят арифметическую прогрессию.

Ответ: 11; 14; 17; 20; 23.

18. Встретится ли среди членов арифметической прогрессии 9,2; 8,7; 8,2; ... число $(-0,8)$?

Ответ: $a_{21} = -0,8$.

19. В арифметической прогрессии $\begin{cases} S_2 - S_4 + a_2 = 14, \\ S_3 + a_3 = 17. \end{cases}$

Найдите a_1; d.

Ответ: $\frac{138}{11}$; $-\frac{73}{11}$.

20. В арифметической прогрессии $\begin{cases} 5a_1 + 10a_5 = 0, \\ S_4 = 14. \end{cases}$

Найдите $(a_1 \cdot d)$.

Ответ: -24.

21. В арифметической прогрессии $\begin{cases} S_5 - S_2 - a_5 = 0,1; \\ S_4 + a_7 = 0,1. \end{cases}$

Найдите $(a_1 - d)$.

Ответ: -1.

22. В возрастающей арифметической прогрессии произведение a_3 и a_6 равно 406. При делении a_9 на a_4 в частном получается 2 и в остатке 6. Найдите a_1 и d.

Ответ: 4; 5.

23. Сумма первого и второго членов арифметической прогрессии составляет 60% от суммы первых трех членов. Определите первый член прогрессии, если ее третий член равен 12.

Ответ: 8.

24. Между числами 1 и 1,3 вставьте пять чисел так, чтобы они вместе с данными составили арифметическую прогрессию.

Ответ: 1,05; 1,1; 1.15; 1,2; 1,25.

25. В арифметической прогрессии $\begin{cases} a_1 + a_2 + a_3 = 30, \\ a_6 - a_4 = -4, \\ a_n = -10. \end{cases}$

Чему равно n?

Ответ: 12.

26. Является ли число 299 общим членом следующих двух арифметических прогрессий:

5; 8; 11; … и 3; 7; 11; …?

Если «да», то укажите его номер в каждой из прогрессий.

Ответ: Да $(99; 75)$.

27. Является ли число 227 общим членом следующих двух арифметических прогрессий:

5; 8; 11; … и 3; 7; 11; …?

Если «да», то укажите его номер в каждой из прогрессий.

Ответ: Да $(75; 57)$.

28. Найдите первый отрицательный член арифметической прогрессии $\frac{7}{12}$; 0,55; ...

Ответ: $-\frac{1}{60}$.

29. Составьте формулу n-го члена арифметической прогрессии, если $a_9 = -30$; $a_{19} = -45$.

Ответ: $a_n = -18 - 1{,}5 \cdot (n-1)$.

30. В арифметической прогрессии $a_1 = -\sqrt{2}$; $d = 1 + \sqrt{2}$. Найдите a_7.

Ответ: $6 + 5\sqrt{2}$.

БЛОК 2. Формула суммы первых n членов арифметической прогрессии

1. Найдите сумму десяти первых членов арифметической прогрессии $a_n = 4n + 1$.

Ответ: 230.

2. В арифметической прогрессии -63; -58; ... найдите сумму всех ее отрицательных членов.

Ответ: -429.

3. В арифметической прогрессии $a_9 = 6$. Найдите S_{17}.

Ответ: 102.

4. В арифметической прогрессии $a_3 = 8$, $a_4 = 5$, $S_n = 28$. Найдите n.

Ответ: 8.

5. В арифметической прогрессии $S_3 = 30$, $S_5 = 75$, $S_n = 105$. Найдите n.

Ответ. 6.

6. Найдите сумму всех натуральных чисел, кратных 6 и не превышающих 70.

Ответ: 396.

7. Третий член арифметической прогрессии в три раза больше второго, а сумма всех членов в 40 раз больше третьего. Найдите число членов.

Ответ: 12.

8. В арифметической прогрессии $a_1 = -5$, $S_{23} = 1\,909$. Найдите d.

Ответ: 8.

9. Турист в первый час достиг высоты 800 *м*, а каждый следующий час поднимался на 25 *м* меньше, чем в предыдущий. За сколько часов он достигнет высоты в 5 700 *м*?

Ответ: 8 *ч*.

10. Даны две арифметические прогрессии:

1) $a_1 = 7$; $a_5 = -5$

2) $a_1 = 0$; $a_n = 3{,}5$.

Найдите сумму членов второй прогрессии, если известно, что третьи члены обеих прогрессий равны между собой.

Ответ: 14.

11. Вычислите: $-\frac{9}{4} - \frac{31}{12} - \frac{35}{12} - \ldots - \frac{45}{4}$.

Ответ: -189.

12. Найдите разность арифметической прогрессии, если первый ее член равен 69, а сумма первых десяти членов равна сумме следующих за ними двадцати членов этой прогрессии.

Ответ: -2.

13. Сколько членов арифметической прогрессии 105, 98, 91, ... нужно взять, чтобы их сумма была равна нулю?

Ответ: 31.

14. В арифметической прогрессии сто тридцать членов. Сумма членов, стоящих на нечетных местах, равна 34, сумма членов, стоящих на четных местах, равна 21. Найдите разность прогрессии.

Ответ: $-0,2$.

15. Найдите сумму двенадцати членов арифметической прогрессии, если сумма первых трех ее членов равна нулю, а сумма четырех первых членов равна 1.

Ответ: 27.

16. В арифметической прогрессии $\begin{cases} a_n = 55; \\ a_2 + a_5 = 32,5; \\ S_{15} = 412,5. \end{cases}$ Найдите n.

Ответ: 19.

17. В убывающей арифметической прогрессии $\begin{cases} a_3 + a_7 = 6, \\ a_3 \cdot a_7 = 8. \end{cases}$

Найдите S_{16}.

Ответ: 20.

18. Сколько членов арифметической прогрессии нужно взять, чтобы их сумма составляла 91, если ее третий член равен 9, а разность седьмого и второго членов равна 20?

Ответ: 7.

19. В арифметической прогрессии $\begin{cases} S_3 = 9, \\ S_4 = 16, \\ S_n = 100. \end{cases}$ Найдите $(a_1 \cdot d \cdot n)$.

Ответ: 20.

20. Восьмой член арифметической прогрессии составляет 40% от четвертого, а их сумма равна 2,8. Сколько нужно взять членов этой прогрессии, чтобы сумма их равнялась 14,3.

Ответ: 13.

21. Сумма первого и пятого членов возрастающей арифметической прогрессии равна 26, а произведение второго и четвертого членов равна 160. Найдите сумму шести первых членов прогрессии.

Ответ: 87.

22. Найдите сумму двадцати членов арифметической прогрессии, у которой $\begin{cases} a_1 + a_4 + a_7 = 45, \\ a_4 \cdot a_6 = 315. \end{cases}$

Ответ: 690.

23. Все члены арифметической прогрессии натуральные числа. Сумма ее первых девяти членов больше 200, но меньше 220. Найдите пятый член этой прогрессии, если второй равен 12.

Ответ: 24.

24. Найдите число членов арифметической прогрессии, у которой сумма всех членов равна 112, произведение второго члена на разность прогрессии равно 30, а сумма третьего и пятого членов равна 32.

Ответ: 7.

25. Чему равна сумма всех трехзначных чисел, кратных 5?

Ответ: 98 550.

26. Найдите число членов арифметической прогрессии, если $a_1 = 6$, $a_{10} = 33$, а сумма всех членов равна 405.

Ответ: 15.

27. Найдите сумму всех двузначных чисел, каждое из которых при делении на 4 дает остаток, равный 3.

Ответ: 1 265.

28. В арифметической прогрессии сумма первых восьми членов равна 32, а сумма первых двадцати членов равна 200. Найдите сумму первых двадцати восьми членов.

Ответ: 392.

29. Третий член арифметической прогрессии равен 10, а восьмой 30. Сколько нужно взять членов, чтобы их сумма равнялась 242?

Ответ: 11.

30. Сколько членов арифметической прогрессии $3;\ 5;\ 7;\ 9;\ \ldots$ нужно взять, чтобы получить сумму, равную 10 200?

Ответ: 100.

БЛОК 3. Задачи с использованием свойств арифметической прогрессии

1. Сумма четырех первых членов арифметической прогрессии равна 56, а сумма четырех последних равна 112. Найдите число членов прогрессии, если первый ее член равен 11.

Ответ: 11.

2. Сумма первых четырех членов арифметической прогрессии равна 40, сумма последних четырех членов равна 104, а сумма всех членов этой прогрессии равна 216. Сколько членов в этой прогрессии.

Ответ: 12.

3. Найдите числа, составляющие арифметическую прогрессию, зная, что сумма ее первых четырех членов равна 26, сумма последних четырех членов 110, а сумма всех членов 187.

Ответ: 2; 5; 8; …

4. При каких значениях x три числа $\lg(5^x-4)$, $\lg 3$ и $\lg(5^x+4)$ образуют арифметическую прогрессию?

Ответ: 1.

5. При каких значениях x три числа $\lg(2^x-1)$, $\frac{1}{2}\lg 31$ и $\lg(2^x+1)$ образуют арифметическую прогрессию?

Ответ: 2,5.

6. При каких значениях x последовательность $2\sqrt{x}$, $\sqrt{7x+8}$ и $4\sqrt{x}$ образует арифметическую прогрессию?

Ответ: 4.

7. При каких значениях x последовательность $\sqrt{2x+9}$, $\sqrt{5x}$, $\sqrt{8x+9}$ образует арифметическую прогрессию?

Ответ: 20.

8. Определите, при каких значениях x числа $\lg 4$; $\lg(9^x+5)$, $\lg(9^x+13)$ образуют арифметическую прогрессию.

Ответ: 0,5.

9. При каких значениях α числа $2\cos\frac{\pi}{6}$; $4\sin\alpha$; $6\sin(\pi-\alpha)$ являются последовательными членами арифметической прогрессии?

Ответ: $(-1)^k \frac{\pi}{3}+\pi k$; $k\in\mathbb{Z}$.

10. Даны три последовательных члена арифметической прогрессии $\sin x$, $\sin 2x$, $\sin 3x$. Найдите x.

Ответ: $\frac{\pi k}{2}$; $k\in\mathbb{Z}$.

БЛОК 4. Нестандартные задачи на арифметическую прогрессию

1. Сумма четвертого и десятого членов арифметической прогрессии равна 10. Найдите сумму первых 13 членов.

Ответ: 65.

2. Найдите сумму: $50^2-49^2+48^2-47^2+\ldots+2^2-1$.

Ответ: 1 275.

3. Решите уравнение: $\frac{x-1}{x}+\frac{x-2}{x}+\ldots+\frac{1}{x}=3$.

Ответ: 7.

4. Решите уравнение: $2+5+8+\ldots+x=155$.

Ответ: 29.

5. В арифметической прогрессии вычислите: $4a_9^2 - 4a_1 \cdot a_9 + a_1^2 - a_{17}^2 + \frac{1}{2}$.

Ответ: $\frac{1}{2}$.

6. Стороны прямоугольного треугольника составляют арифметическую прогрессию. Периметр треугольника равен 24. Найдите площадь треугольника.

Ответ: 24.

7. Найдите сумму 19 первых членов арифметической прогрессии, если известно, что $a_4 + a_8 + a_{12} + a_{16} = 224$.

Ответ: 1 064.

8. Решите уравнение: $2 + 6 + 10 + ... + 2x = 242$.

Ответ: 21.

9. Известно, что при любом n сумма S_n членов некоторой арифметической прогрессии выражается формулой $S_n = 4n^2 - 3n$. Найдите произведение первых трех членов этой прогрессии.

Ответ: 153.

10. Сумма пяти первых членов арифметической прогрессии меньше суммы ее последующих пяти членов на 50. На сколько десятый член прогрессии больше второго?

Ответ: 16.

11. Найдите сумму всех трехзначных чисел, не делящихся на 13.

Ответ: 456 876.

12. Найдите сумму всех трехзначных чисел, не делящихся на 17.

Ответ: 465 718.

13. Найдите три первых члена арифметической прогрессии, у которой сумма любого числа членов равна утроенному квадрату этого числа.

Ответ: 3; 9; 15.

14. Решите уравнение: $3^3 \cdot 3^5 \cdot 3^7 \cdot \ldots \cdot 3^{2x-1} = 27^5 \quad (x \in \mathbb{N})$.

Ответ: 4.

15. Стороны прямоугольного треугольника составляют арифметическую прогрессию. Найдите периметр треугольника, если площадь его равна 6.

Ответ: 12.

16. Сумма цифр четырехзначного числа равна 16. Найдите это число, если известно, что его цифры образуют арифметическую прогрессию и цифра единиц на 4 больше цифры сотен.

Ответ: 1 357.

17. Периметр некоторого многоугольника равен 158, причем длины сторон его составляют арифметическую прогрессию, разность которой 3. Наибольшая сторона многоугольника равна 44. Сколько сторон имеет многоугольник?

Ответ: 4.

18. Известно, что внутренние углы некоторого выпуклого многоугольника, наименьший из которых равен $100°$, образуют арифметическую прогрессию с разностью $10°$. Найдите число сторон этого многоугольника.

Ответ: 8.

19. Меньший катет треугольника равен a, стороны треугольника составляют арифметическую прогрессию. Найдите площадь.

Ответ: $\frac{2}{3}a^2$.

20. Первый член арифметической прогрессии равен единице. При каком значении разности прогрессии d величина $(a_1 \cdot a_3 + a_2 \cdot a_3)$ имеет минимальное значение?

Ответ: $-\frac{5}{4}$.

§ 2. ГЕОМЕТРИЧЕСКАЯ ПРОГРЕССИЯ

БЛОК 1. Формула n-го члена геометрической прогрессии

1. Найдите пятый член геометрической прогрессии, в которой $b_3 + b_4 = 36$, $b_2 + b_3 = 18$.

Ответ: 48.

2. Известны два члена геометрической прогрессии $b_n = 3$, $b_{n+8} = 243$. Чему равен b_{n+3}?

Ответ: $\pm 9\sqrt{3}$.

3. Между числами 243 и 1 поместите четыре числа, которые вместе с данными числами образовывали бы геометрическую прогрессию.

Ответ: 81; 27; 9; 3.

4. Отношение девятого члена геометрической прогрессии к ее шестому члену равно $\frac{1}{8}$. Найдите первый член прогрессии, если ее пятый член равен 3.

Ответ: 48.

5. Второй член убывающей геометрической прогрессии равен 192, а ее четвертый член равен 48. Сколько членов данной прогрессии являются двузначными натуральными числами?

Ответ: 4.

6. Три числа образуют геометрическую прогрессию. Их произведение равно 64, а их среднее арифметическое равно $\frac{14}{3}$. Найдите первый член прогрессии.

Ответ: 2 или 8.

7. Три числа составляют геометрическую прогрессию. Среднее арифметическое второго и третьего ее членов равно 20, а среднее арифметическое первого и второго членов равно 5. Найдите эти числа.

Ответ: 2; 8; 32.

8. Найдите знаменатель геометрической прогрессии, если сумма первого и четвертого членов равна 35, а сумма второго и третьего членов равна 30. Известно, что прогрессия возрастающая.

Ответ: $\frac{3}{2}$.

9. Найдите четыре числа, образующие геометрическую прогрессию, у которой третий член больше первого на 9, а второй больше четвертого на 18.

Ответ: 3; –6; 12; –24.

10. Найдите знаменатель геометрической прогрессии, если сумма первых двух членов равна 6, а сумма первых трех членов равна 7.

Ответ: $-\frac{1}{3}$ или $\frac{1}{2}$.

11. Чему равен пятый член геометрической прогрессии, если произведение третьего и седьмого ее членов равно 144?

Ответ: ± 12.

12. В геометрической прогрессии $b_1 = \frac{1}{81}$; $q = 3$. Найдите номер члена прогрессии, равного 27.

Ответ: 8.

13. Выясните, принадлежит ли число $\frac{3\,750}{243}$ последовательности 2; $\frac{10}{3}$; $\frac{50}{9}$; ... и укажите его номер.

Ответ: Да (5).

14. Найдите знаменатель геометрической прогрессии, состоящей из 7 членов, если сумма первых трех членов равна 26, а трех последних 2 106. Члены прогрессии – натуральные числа.

Ответ: 3.

15. Члены геометрической прогрессии – натуральные числа. Третий член равен кубу первого. Сумма первых трех ее членов в 7 раз больше первого члена. Найдите прогрессию.

Ответ: 2; 4; 8; ...

16. Последовательность (b_n) – геометрическая прогрессия, причем $\frac{b_{10}}{b_8}=9$; $b_4+b_6=540$. Найдите b_1.

Ответ: ± 2.

17. (b_n) – геометрическая прогрессия, причем $b_1+b_2+b_3=14$; $b_1^2+b_2^2+b_3^2=84$. Найдите b_1; q.

Ответ: 2; 2 или 8; $\frac{1}{2}$.

18. Найдите b_1 и q геометрической прогрессии, в которой сумма первых четырех членов равна 40, а сумма членов, начиная с четвертого и до седьмого включительно, равна 1 080.

Ответ: 1; 3.

19. Сумма трех первых членов геометрической прогрессии равна 21, а сумма их квадратов равна 189. Найдите первый член прогрессии.

Ответ: 3 или 12.

20. Четвертый член геометрической прогрессии больше второго члена на 24, а сумма второго и третьего членов равна 6. Найдите четвертый член этой прогрессии.

Ответ: 25.

21. Найдите первый член геометрической прогрессии, сумма первых трех членов которой равна 10,5, а разность первого и четвертого членов равна 31,5.

Ответ: 3,5.

22. Найдите наибольшее число из трех чисел, образующих геометрическую прогрессию с положительными членами, если сумма их равна 21, а сумма обратных величин равна $\frac{7}{12}$.

Ответ: 12.

23. Определите первый член и знаменатель геометрической прогрессии, в которой $\begin{cases} b_5 - b_1 = 15, \\ b_4 - b_2 = 6. \end{cases}$

Ответ: 1; 2 или -16; $\frac{1}{2}$.

24. Найдите три числа, составляющие геометрическую прогрессию, если известно, что сумма первого и третьего членов равна 52, а квадрат второго равен 100.

Ответ: 50; 10; 2 или 50; -10; 2.

25. Найдите четыре числа, составляющих возрастающую геометрическую прогрессию, в которой сумма крайних членов равна 27, а произведение средних равно 72.

Ответ: 3; 6; 12; 24.

26. Между числами 5 и 405 напишите три числа, которые вместе с двумя данными числами образуют возрастающую геометрическую прогрессию.

Ответ: 15; 45; 135.

27. В геометрической прогрессии третий член равен 3. Найдите произведение первых пяти членов этой прогрессии.

Ответ: 243.

28. Найдите число членов геометрической прогрессии, в которой $b_1 = 2$; $q = 4$; $b_n = 2\,048$.

Ответ: 6.

29. Начиная с какого номера члены геометрической прогрессии -8; 4; -2; … по абсолютной величине меньше $0{,}001$?

Ответ: 14.

30. Известно, что $b_1, \ldots, b_{11}$ – геометрическая прогрессия и $b_1 \cdot b_3 \cdot b_{11} = 8$. Найдите $(b_2 \cdot b_8)$.

Ответ: 4.

БЛОК 2. Формула суммы *n* первых членов геометрической прогрессии

1. Найдите число членов геометрической прогрессии, в которой $b_2 + b_3 = 18$, $b_4 - b_2 = 18$, $S_n = 93$.

Ответ: 5.

2. В геометрической прогрессии с положительными членами $b_3 = 12$, $b_5 = 48$. Сколько членов, начиная с первого, надо взять, чтобы их сумма была равна 189?

Ответ: 6.

3. Найдите число членов геометрической прогрессии, в которой $b_4 + b_5 = 24$, $b_6 - b_4 = 24$, $S_n = 127$.

Ответ: 7.

4. В геометрической прогрессии с положительными членами $S_2 = 4$, $S_3 = 13$ Найдите S_4.

Ответ: 40.

5. Определите число членов геометрической прогрессии, в которой $b_1 = 2$; $b_n = \frac{1}{8}$; $S_n = 3\frac{7}{8}$.

Ответ: 5.

6. В геометрической прогрессии двадцать восемь членов. Сумма членов, стоящих на нечетных местах, равна 60, сумма членов, стоящих на четных местах, равна 75. Найдите знаменатель прогрессии.

Ответ: $\frac{5}{4}$.

7. Сумма первых четырех членов возрастающей геометрической прогрессии равна 15, а сумма следующих четырех членов равна 2 Найдите сумму первых шести членов этой прогрессии.

Ответ: 63.

8. Разность между пятым и вторым членами геометрической прогрессии, все члены которой – положительные числа, равна 234, разность между третьим и вторым ее членами равна 18. Сколько членов этой прогрессии следует взять, чтобы в сумме получить 120?

Ответ: 4.

9. В геометрической прогрессии $b_1 + b_3 + b_5 = 182$; $b_2 + b_4 + b_6 = 546$. Сколько членов этой прогрессии следует взять, чтобы в сумме получить 242?

Ответ: 5.

10. Сумма первых трех членов возрастающей геометрической прогрессии равна 13, а их произведение равно 27. Вычислите сумму первых пяти членов этой прогрессии.

Ответ: 121.

11. Определите восьмой член геометрической прогрессии, у которой $b_1 = 3$, $b_n = 96$, $S_n = 189$.

Ответ: 384.

12. Определите число членов геометрической прогрессии, если

$$\begin{cases} b_6 - b_4 = 216, \\ b_3 - b_1 = 8, \\ S_n = 40. \end{cases}$$

Ответ: 4.

13. Первый член геометрической прогрессии равен 3, а последний равен 24. Определите знаменатель прогрессии, если ее сумма на 43 больше знаменателя.

Ответ: 2.

14. Сумма первых трех членов геометрической прогрессии равна 12, а сумма первых шести членов равна (-84). Найдите третий член прогрессии.

Ответ: 16.

15. Найдите первый член геометрической прогрессии, в которой $\frac{b_1+b_3}{b_2+b_4}=2$, $S_5=279$.

Ответ: 144.

16. Сколько членов геометрической прогрессии 6; 12; 24; … надо сложить, чтобы полученная сумма была равна 3 066.

Ответ: 9.

17. Найдите сумму, в которой слагаемые составляют геометрическую прогрессию $0,02+0,06+0,18+...+43,74$.

Ответ: 65,6.

18. Найдите сумму: $1+2+2^2+...+2^8$.

Ответ: 511.

19. Сумма первых трех членов геометрической прогрессии, все члены которой положительные числа, равна 221. Третий член этой прогрессии больше первого на 136. Найдите сумму первых шести членов данной прогрессии.

Ответ: 6 188.

20. В геометрической прогрессии $b_1=2$; $b_n=1\,024$; $S_n=2\,046$. Найдите число ее членов.

Ответ: 10.

Б ЛОК 3. Задачи с использованием свойств геометрической прогрессии

1. Найдите y, если числа 1; $\sqrt{y}$; $3\sqrt{y}+4$ – последовательные члены геометрической прогрессии.

Ответ: 16.

2. При каких значениях y числа $y-\frac{1}{3}$; $3y-1$; $2y+4$; $7y+11$ являются последовательными членами геометрической прогрессии?

Ответ: 1.

3. При каких значениях x числа $\sqrt{x-5}$; $\sqrt[4]{10x+4}$; $\sqrt{x+2}$ являются последовательными членами геометрической прогрессии?

Ответ: 14.

4. Числа a, b, c, d составляют геометрическую прогрессию. Найдите $(a-c)^2+(b-c)^2+(b-d)^2-(a-d)^2$.

Ответ: 0.

5. При каких значениях x последовательность x; $\sqrt[4]{10x}$; $x^{\lg x}$ будет геометрической прогрессией?

Ответ: 0,1 или $\sqrt{10}$.

6. Найдите число x, если числа $30-x^2$; x^2; 1 являются последовательными членами геометрической прогрессии.

Ответ: $\pm\sqrt{5}$.

7. В возрастающей геометрической прогрессии сумма первого и последнего членов равна 99, произведение второго и предпоследнего членов равно 288, сумма всех членов равна 189. Найдите знаменатель геометрической прогрессии.

Ответ: 2.

БЛОК 4. Задачи на бесконечно убывающую геометрическую прогрессию

1. Сумма членов бесконечно убывающей геометрической прогрессии равна 9, а сумма квадратов членов прогрессии 40,5. Найдите прогрессию.

Ответ: 6; 2; $\frac{2}{3}$; …

2. Определите бесконечно убывающую геометрическую прогрессию, в которой второй член равен 6, а сумма членов равна $\frac{1}{8}$ суммы квадратов ее членов.

Ответ: 12; 6; 3; ...

3. Решите уравнение: $\frac{1}{x}+1+x+x^2+...+x^n+...=\frac{9}{2}$, где $|x|<1$.

Ответ: $\frac{1}{3}$; $\frac{2}{3}$.

4. Решите уравнение: $2^{x-4}+2^{x-2}+2^{x-1}=6{,}5+3{,}25+1{,}625+...$.

Ответ: 4.

5. Первый член бесконечно убывающей геометрической прогрессии равен 2, а ее сумма равна 5. Найдите сумму членов геометрической прогрессии, составленной из квадратов членов исходной прогрессии.

Ответ: 6,25.

6. Найдите знаменатель бесконечно убывающей геометрической прогрессии, сумма которой равна 2,25; а второй член равен 0,5.

Ответ: $\frac{1}{3}$ или $\frac{2}{3}$.

7. Найдите сумму: $\sqrt{3}+\frac{\sqrt{3}}{2+\sqrt{3}}+\frac{2\sqrt{3}-3}{2+\sqrt{3}}+...$

Ответ: $\frac{3+\sqrt{3}}{2}$.

8. Сумма бесконечно убывающей геометрической прогрессии равна 4, а сумма кубов ее членов равна $9\frac{1}{7}$. Найдите сумму квадратов членов этой прогрессии.

Ответ: $\frac{16}{3}$.

9. Вычислите: $\sqrt{5\sqrt{5\sqrt{5\sqrt{5...}}}}$.

Ответ: 5.

10. Вычислите: $-\frac{16}{3}+\frac{8}{3}-\frac{4}{3}+\frac{2}{3}-...$

Ответ. $-3\frac{5}{9}$.

11. В бесконечно убывающей геометрической прогрессии $b_1 \cdot b_3 \cdot b_5 = -64$; $b_2 + b_4 = 10$. Найдите S.

Ответ. $-\frac{32}{3}$.

12. При каком значении a сумма бесконечно убывающей геометрической прогрессии $2a$, $a\sqrt{2}$, ... равна 8?

Ответ: $4-2\sqrt{2}$.

13. Найдите первый член и знаменатель бесконечно убывающей геометрической прогрессии, сумма первых двух членов которой равна 48, а сумма всех членов равна 49.

Ответ: 42; $\frac{1}{7}$ или 56; $-\frac{1}{7}$.

14. Разность квадратов первых двух членов бесконечно убывающей геометрической прогрессии с положительными членами равна 27, а сумма прогрессии, составленной из квадратов ее членов, равна 48. Найдите эту прогрессию.

Ответ: 6; 3; 1,5; ...

15. Сумма бесконечно убывающей геометрической прогрессии равна 64, а сумма ее первых трех членов равна 65. Найдите третий член прогрессии.

Ответ: 5.

16. Вычислите: $\frac{3}{7}+1+\frac{9}{49}+\frac{1}{3}+\frac{27}{343}+\frac{1}{9}+...$

Ответ: $2\frac{1}{4}$.

17. Сумма членов бесконечно убывающей геометрической прогрессии в 3 раза больше ее первого члена. Найдите отношение $\frac{b_2}{b_4}$.

Ответ: $\frac{9}{4}$.

18. Найдите знаменатель бесконечно убывающей геометрической прогрессии, зная, что сумма ее первых шести членов составляет $\frac{7}{8}$ суммы всех ее членов.

Ответ: $\pm\frac{1}{\sqrt{2}}$.

19. В бесконечно убывающей геометрической прогрессии с положительными членами сумма первых трех членов равна 10,5, а сумма прогрессии равна 12. Найдите второй член прогрессии.

Ответ: 3.

20. Все члены бесконечно убывающей геометрической прогрессии положительны. Сумма первых трех членов равна 39, а сумма обратных величин этих членов равна $\frac{13}{27}$. Найдите сумму прогрессии.

Ответ: 40,5.

БЛОК 5. Нестандартные задачи на геометрическую прогрессию

1. Геометрическая прогрессия состоит из 6 членов. Найдите ее знаменатель, зная, что сумма трех первых членов в 8 раз меньше суммы трех последних членов.

Ответ: 2.

2. Сумма трех чисел, образующих возрастающую геометрическую прогрессию, равна 42. Сумма логарифмов этих чисел по основанию 2 равна 9. Найдите знаменатель прогрессии.

Ответ: 4.

3. Произведение членов геометрической прогрессии с десятого по шестнадцатый включительно равно $125\sqrt{5}$. Найдите тринадцатый член прогрессии.

Ответ: $\sqrt{5}$.

4. Решите уравнение: $\frac{1}{2}-\frac{1}{4}+\frac{1}{8}-\frac{1}{16}+...-\frac{1}{1\,024}=\frac{x+1}{512}$.

Ответ: 169,5.

5. Произведение семнадцатого и двадцать седьмого членов геометрической прогрессии равно 9,3. Найдите произведение одиннадцатого и тридцать третьего членов этой прогрессии.

Ответ: 9,3.

6. Каждый член геометрической прогрессии равен одной шестой суммы двух последующих членов. Найдите ее знаменатель, если $b_1=1$.

Ответ: -3; 2.

7. Каждый член возрастающей геометрической прогрессии b_n удовлетворяет условию $b_{n+1}=2b_n+3b_{n-1}$ $(n\geq 2)$. Найдите знаменатель прогрессии, если $b_1=1$.

Ответ: 3.

8. Разделить число 7 812 на шесть частей так, чтобы отношение каждой части к последующей было равно $\frac{1}{5}$.

Ответ: 2; 10; 50; 250; 1 250; 6 250.

9. Найдите отношение третьего члена убывающей геометрической прогрессии к пятнадцатому ее члену, если сумма двенадцати членов этой прогрессии, начиная с тринадцатого, составляет 40% суммы ее начальных двенадцати членов.

Ответ: $\frac{5}{2}$.

10. Первый член геометрической прогрессии равен единице. При каком значении знаменателя прогрессии величина $(4b_2 + 5b_3)$ имеет минимальное значение?

Ответ: $-\frac{2}{5}$.

11. Первый член геометрической прогрессии b_1, b_2, ... равен 2. При каком значении знаменателя прогрессии величина $(6b_2 + 5b_3)$ имеет минимальное значение?

Ответ: $-0,6$.

12. Произведение восемнадцатого и двадцать третьего членов геометрической прогрессии равно 1,9. Найдите произведение двенадцатого и двадцать девятого членов этой прогрессии.

Ответ: 1,9.

13. В геометрической прогрессии $b_5 = \sqrt[3]{2}$. Найдите произведение первых девяти членов этой прогрессии.

Ответ: 8.

14. Сумма n членов геометрической прогрессии вычисляется по формуле $S_n = 10 \cdot (2^n - 1)$. Найдите седьмой член этой прогрессии.

Ответ: 640.

15. Число 155 разделить на три части так, чтобы полученные числа составляли геометрическую прогрессию, при этом первый член был бы меньше третьего на 120.

Ответ: 5; 25; 125.

16. Сумма членов бесконечно убывающей геометрической прогрессии равна наибольшему значению функции $f(x)=x^3+3x-9$ на $[-2;3]$, а $b_1-b_2=f'(0)$. Чему равен знаменатель этой прогрессии?

Ответ: $\frac{2}{3}$.

17. Сумма n первых членов геометрической прогрессии при любом натуральном n вычисляется по формуле $S_n=3\cdot(2^n-1)$. Найдите пятый член этой прогрессии.

Ответ: 48.

18. Сумма трех последовательных членов геометрической прогрессии равна 62, а сумма их десятичных логарифмов равна 3. Найдите знаменатель прогрессии.

Ответ: 5 или $\frac{1}{5}$.

19. Найдите первый член геометрической прогрессии, если сумма ее первого и третьего членов равна 35, а сумма первых пяти членов в 49 раз больше суммы их обратных величин.

Ответ: 28.

20. Могут ли длины сторон прямоугольного треугольника образовывать геометрическую прогрессию?

Ответ: Могут, $q=\sqrt{\frac{1+\sqrt{5}}{2}}$.

21. Произведение первых двенадцати членов геометрической прогрессии разделить на одиннадцатую степень первого члена. Какой член геометрической прогрессии вы получите?

Ответ: шестьдесят седьмой член прогрессии.

БЛОК 6. Комбинированные задачи на арифметическую и геометрическую прогрессии

1. Первые три из целых чисел a, b, c, k образуют арифметическую прогрессию, последние три – геометрическую прогрессию. Найдите число k, если $a+k=36$; $b+c=27$.

Ответ: 36.

2. Сумма трех чисел, составляющих возрастающую геометрическую прогрессию, равна 26, если к этим числам прибавить соответственно 1; 7 и 5, то полученные числа составят арифметическую прогрессию. Найдите знаменатель геометрической прогрессии.

Ответ: 3.

3. Сумма первых трех членов возрастающей арифметической прогрессии равна 15. Если из первых двух членов этой прогрессии вычесть по единице, а к третьему числу прибавить единицу, то полученные числа составят геометрическую прогрессию. Найдите сумму 10 первых членов арифметической прогрессии.

Ответ: 120.

4. Три числа, из которых третье равно 12, образуют геометрическую прогрессию. Если вместо 12 взять 9, то три числа составят арифметическую прогрессию. Найдите эти числа.

Ответ: 3; 6; 12 или 27; 18; 12.

5. Сумма трех чисел, составляющих геометрическую прогрессию, равна 26. Если первое число оставить без изменений, второе увеличить на 3, а третье уменьшить на 2, то полученные числа будут составлять арифметическую прогрессию. Найдите исходные числа.

Ответ: 2; 6; 18 или 18; 6; 2.

6. Все члены геометрической прогрессии различны. Между ее вторым и третьим членами можно вставить число z такое, что b_1, b_2, z и b_3 будут являться четырьмя последовательными членами арифметической прогрессии. Найдите знаменатель.

Ответ: 2.

7. Пять различных чисел составляют арифметическую прогрессию. Если удалить ее второй и третий члены, то три оставшихся числа составят геометрическую прогрессию. Найдите ее знаменатель.

Ответ: $\frac{1}{3}$.

8. Найдите знаменатель убывающей геометрической прогрессии, если $b_1 = 1$, а числа b_2, b_3, b_5 являются последовательными членами арифметической прогрессии.

Ответ: $\frac{\sqrt{5}-1}{2}$.

9. Сумма трех чисел, составляющих возрастающую геометрическую прогрессию, равна 56. Если из них вычесть соответственно 1; 7 и 21, то вновь полученные числа составят арифметическую прогрессию. Найдите сумму десяти членов геометрической прогрессии.

Ответ: 8 184.

10. Сумма трех чисел, составляющих возрастающую арифметическую прогрессию, равна 15. Если к ним прибавить соответственно 1; 4 и 19, то полученные числа составят геометрическую прогрессию. Найдите сумму восьми членов геометрической прогрессии.

Ответ: 9 840.

11. Четыре числа составляют арифметическую прогрессию. Если к ним соответственно прибавить 1; 1; 3; 9, то получим геометрическую прогрессию. Найдите эти числа.

Ответ: 1; 3; 5; 7.

12. Четыре числа составляют геометрическую прогрессию. Если от первого числа отнять 11, от второго 1, от третьего 3, а от четвертого 9, то получим арифметическую прогрессию. Найдите эти числа.

Ответ: 27; 9; 3; 1.

13. Второй, первый и третий члены арифметической прогрессии, разность которой отлична от нуля, образуют в указанном порядке геометрическую прогрессию. Найдите ее знаменатель.

Ответ: -2.

14. Между числом 3 и неизвестным числом вставлено еще одно число так, что все три числа образуют арифметическую прогрессию. Если средний член уменьшить на 6, то получится геометрическая прогрессия. Найдите неизвестное число.

Ответ: 3 или 27.

15. Если от третьего члена геометрической прогрессии отнять 4, то первые три члена образуют арифметическую прогрессию с разностью 2. Найдите исходную геометрическую прогрессию.

Ответ: 1; 3; 9; …

16. Три числа образуют геометрическую прогрессию. Если среднее из них удвоить, то получится арифметическая прогрессия. Определите знаменатель прогрессии.

Ответ: $2\pm\sqrt{3}$.

17. Первый член возрастающей арифметической прогрессии и первый член возрастающей геометрической прогрессии равны 3. Второй член арифметической прогрессии больше второго члена геометрической прогрессии на 6; третьи члены прогрессий одинаковы. Найдите эти прогрессии.

Ответ: 3; 15; 27 и 3; 9; 27.

18. Первые члены арифметической и геометрической возрастающих прогрессий одинаковы, и каждый из них равен 3. Вторые члены прогрессий также равны между собой. Третий член геометрической прогрессии относится к третьему члену арифметической прогрессии, как $9:5$. Найдите эти прогрессии.

Ответ: 3; 9; 15; … и 3; 9; 27; …

19. Найдите четыре числа, если первые три из них составляют арифметическую прогрессию, последние три – геометрическую прогрессию. Известно, что разность арифметической прогрессии равна 4 а знаменатель геометрической прогрессии равен $\frac{4}{3}$.

Ответ: 8; 12; 16; $21\frac{1}{3}$.

20. Сумма пяти членов арифметической прогрессии равна корню уравнения $8^{2x+1} = (0{,}125)^{4-3x}$, последний ее член равен сумме членов бесконечно убывающей геометрической прогрессии $\frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{2}{9} + \ldots$. Составьте арифметическую прогрессию.

Ответ: $\frac{1}{2}$; $\frac{3}{4}$; 1; $\frac{5}{4}$; $\frac{3}{2}$.

ГЛАВА VI. РЕШЕНИЕ ТЕКСТОВЫХ ЗАДАЧ

БЛОК 1. Равномерное движение по прямой

1. Поезд был задержан на станции на 6 *мин* и ликвидировал опоздание на перегоне в 36 *км*, увеличив скорость на 4 *км/ч*. Определите первоначальную скорость поезда.

Ответ: 36 *км/ч*.

2. Электропоезд вышел со станции A по направлению к станции B. Пройдя 450 *км*, что составило 75% всего пути AB, поезд должен был остановиться из-за снежного заноса. Через полчаса путь был расчищен, и машинист, увеличив скорость электропоезда на 15 *км/ч*, привел его на станцию B без опоздания. Найдите первоначальную скорость поезда.

Ответ: 60 *км/ч*.

3. Теплоход должен был пройти 72 *км* с определенной скоростью. Фактически, первую половину пути он шел со скоростью на 3 *км/ч* меньше, а вторую половину со скоростью на 3 *км/ч* больше, чем ему полагалось. На весь путь теплоход затратил 5 *ч*. На сколько минут опоздал теплоход?

Ответ: 12 *мин*.

4. Расстояние между двумя станциями железной дороги 120 *км*. Первый поезд проходит это расстояние на 50 *мин* скорее, чем второй, скорость первого поезда больше скорости второго на 12 *км/ч*. Определите скорости обоих поездов.

Ответ: 48 *км/ч*; 36 *км/ч*.

5. Из пункта A в пункт B, расстояние между которыми равно 18 *км*, вышел пешеход. Через 2 часа вслед за ним выехал велосипедист, который проезжал за каждый час на 4,5 *км* больше, чем проходил пешеход за 1 час. Определите скорость движения велосипедиста, если известно, что он прибыл в пункт B одновременно с пешеходом.

Ответ: 9 *км/ч*.

6. Легковая машина выехала на 2 *мин* позднее грузовой и догнала грузовую через 10 *км*. Определите скорости машин, если легковая проезжает в час на 15 *км* больше грузовой.

Ответ: 60 *км/ч* и 75 *км/ч*.

7. Из A и B одновременно выезжают автобус и велосипедист. Автобус, двигаясь со скоростью 45 *км/ч*, после 15-минутной стоянки в B отправляется в обратный рейс и встречает велосипедиста, движущегося со скоростью 12 *км/ч*, на середине пути между A и B. Найдите расстояние AB.

Ответ: 30 *км*.

8. Турист проехал 160 *км*, причем $\frac{5}{8}$ этого пути он ехал на автомашине, а остальную часть - на катере. Скорость катера на 20 *км/ч* меньше скорости автомашины. На автомашине турист ехал на 15 *мин* больше времени, чем на катере. Чему равны скорости катера и автомашины?

Ответ: 60 *км/ч* и 80 *км/ч* или 80 *км/ч* и 100 *км/ч*.

9. Два поезда выходят из двух городов, расстояние между которыми равно 360 *км*, и идут навстречу друг другу. Они могут встретиться на середине пути, если второй поезд выйдет со станции на 1,5 часа раньше первого. Если же они выйдут со станции одновременно то через 5 часов расстояние между ними будет равно 90 *км*. Найдите скорость каждого поезда.

Ответ: 30 *км/ч* и 24 *км/ч*.

10. Два автомобиля вышли одновременно из городов A и B навстречу друг другу. Через час автомобили встретились и, не останавливаясь, продолжали путь с той же скоростью. Первый прибыл в город B на 27 *мин* позже, чем второй прибыл в город A. Определите скорость каждого автомобиля, если известно, что расстояние между городами 90 *км*.

Ответ: 40 *км/ч* и 50 *км/ч*.

11. Два велосипедиста выезжают одновременно навстречу друг другу из пунктов A и B, расстояние между которыми 28 *км*, и через час встречаются. Не останавливаясь, они продолжают путь с той же скоростью, и первый прибывает в пункт B на 35 *мин* скорее, чем второй в пункт A. Определите скорость каждого велосипедиста.

Ответ: 16 *км/ч* и 12 *км/ч*.

12. С аэродрома одновременно вылетают два самолета: один по направлению на юг со скоростью 192 *км/ч*, а другой по направлению на восток со скоростью 256 *км/ч*. На каком расстоянии друг от друга будут находиться самолеты через 3 часа?

Ответ: 960 *км*.

13. Из порта одновременно вышли два парохода: один на север, а второй на восток. Через два часа расстояние между ними оказалось равным 60 *км*. Найдите скорость каждого парохода, зная, что скорость одного из них на 6 *км/ч* больше скорости другого.

Ответ: 18 *км/ч*; 24 *км/ч*.

14. Поезд был задержан в пути на 6 *мин* и ликвидировал опоздание на перегоне в 20 *км*, пройдя его со скоростью на 10 *км/ч* больше той, которая полагалась по расписанию. Определите скорость поезда на этом перегоне по расписанию.

Ответ: 40 *км/ч*.

15. На середине пути между станциями A и B поезд был задержан на 10 *мин*. Чтобы прийти в B по расписанию, машинисту пришлось первоначальную скорость поезда увеличить на 6 *км/ч*. Найдите первоначальную скорость поезда, если известно, что расстояние между станциями равно 60 *км*.

Ответ: 30 *км/ч*.

16. Паровоз, пройдя первый перегон в 24 *км*, был задержан на некоторое время, а потом следующий перегон прошел со скоростью, большей прежней на 4 *км/ч*. Несмотря на то, что второй перегон был длиннее первого на 15 *км*, паровоз прошел его за время, только на 20 *мин* большее, чем потребовалось на прохождение первого перегона. Определите первоначальную скорость паровоза.

Ответ: 32 *км/ч*.

17. Поезд должен был пройти 840 *км*. В середине пути он был задержан на 30 *мин*, и поэтому, чтобы прибыть вовремя, он должен был увеличить скорость на 2 *км/ч*. Сколько времени поезд затратил на весь путь?

Ответ: 21 *час*.

18. От станций A и B, расстояние между которыми 75 *км*, отправились одновременно навстречу друг другу товарный и скорый поезда и встретились через полчаса. Товарный поезд прибыл в B на 25 *мин* позже, чем скорый прибыл в A. Какова скорость каждого поезда?

Ответ: 60 *км/ч* и 90 *км/ч*.

19. Два человека отправляются из одного и того же места на шестикилометровую прогулку. Один идет со скоростью 3 *км/ч*, а другой - со скоростью 5,5 *км/ч*. Дойдя до места назначения, второй с той же скоростью возвращается обратно. На каком расстоянии от точки отправления произойдет их встреча?

Ответ: На расстоянии $\frac{72}{17}$ *км* от точки отправления.

20. Поезд, двигаясь равномерно со скоростью 60 *км/ч*, проезжает мимо рва, длина которого 200 метров, за 0,3 минуты. Определите длину поезда.

Ответ: 100 *м*.

<u>БЛОК 2</u>. Движение по реке

1. На путь по течению реки катер затратил 3 *ч*, а на обратный путь 4,5 *ч*. Какова скорость течения реки, если скорость катера относительно воды 25 *км/ч*?

Ответ: 5 *км/ч*.

2. От первой пристани ко второй отправилась лодка со скоростью 12 *км/ч*, а через полчаса после нее в том же направлении вышел пароход со скоростью 20 *км/ч*. Каково расстояние между пристанями, если пароход пришел на 1,5 часа раньше лодки?

Ответ: 60 *км*.

3. Расстояние между двумя пристанями по реке равно 80 *км*. Лодка проходит этот путь туда и обратно за 8 часов 20 минут. Определите скорость лодки в стоячей воде, считая скорость течения реки равной 4 *км /ч*.

Ответ: 20 *км/ч*.

4. Лодочник проезжает расстояние 16 *км* по течению реки на 6 *ч* быстрее, чем против течения; при этом скорость лодки в стоячей воде на 2 *км/ч* больше скорости течения реки. Определите скорость лодки в стоячей воде и скорость течения реки.

Ответ: 5 *км/ч*; 3 *км/ч*.

5. Моторная лодка прошла вниз по течению реки 14 *км*, а затем 9 *км* против течения, затратив на весь путь 5 часов. Найдите скорость течения реки, если скорость моторной лодки в стоячей воде равна 5 *км/ч*.

Ответ: 2 *км/ч*.

6. Катер прошел 75 *км* по течению реки и столько же против течения. На весь путь он затратил в 2 раза больше времени, чем ему понадобилось бы, чтобы пройти 80 *км* в стоячей воде. Какова скорость катера в стоячей воде, если скорость течения реки равна 5 *км/ч*?

Ответ: 20 *км/ч*.

7. Турист проплыл на байдарке 25 *км* по озеру и 9 *км* против течения реки за столько же времени, сколько ему потребовалось бы для того, чтобы проплыть по течению реки 56 *км*. Зная, что скорость течения реки равна 2 *км/ч*, найдите скорость байдарки в стоячей воде.

Ответ: 5 *км/ч*.

8. Моторная лодка прошла 39 *км* по течению реки и 28 *км* против течения за то же время, за которое она могла в стоячей воде пройти 70 *км*. Какую скорость имеет моторная лодка в стоячей воде, если скорость течения реки 3 *км/ч*?

Ответ: 10 *км/ч*.

9. Катер, скорость которого в стоячей воде 15 *км/ч*, отправился от речного причала вниз по течению реки и, пройдя 36 *км*, догнал плот, отправленный от того же причала за 10 *ч* до отправления катера. Найдите скорость течения реки.

Ответ: 3 *км/ч*.

10. Турист проплыл по течению реки на плоту 12 *км*, возвратился обратно на лодке, скорость которой в стоячей воде 5 *км/ч*. Найдите скорость течения реки, если известно, что на все путешествие турист затратил 10 *ч*.

Ответ: 2 *км/ч* или 3 *км/ч*.

11. Расстояние между двумя пристанями по реке равно 40 *км*. Пароход проходит это расстояние туда и обратно за 6 часов, причем на остановки в пути тратит 1,5 часа. Определите скорость течения реки, если собственная скорость парохода 18 *км/ч*.

Ответ: 2 *км/ч*.

12. На сколько километров можно отплыть от пристани против течения реки на лодке, скорость которой в стоячей воде равна 8 *км/ч*, чтобы успеть вернуться обратно через 4 часа, если скорость течения реки 2 *км/ч*?

Ответ: 15 *км*.

13. От пристани по течению отправился плот. Через 4 часа вслед за ним отправился катер, который догнал плот, пройдя 15 *км*. Вычислите скорость течения реки, если скорость катера в стоячей воде равна 12 *км/ч*.

Ответ: 3 *км/ч*.

14. Моторная лодка 7 *ч* шла по течению реки и 6 *ч* против течения. Найдите скорость течения реки, если скорость лодки в стоячей воде равна 10 *км/ч* и за все путешествие лодка прошла 132 *км*.

Ответ: 2 *км/ч*.

15. Моторная лодка проплыла вверх по течению 24 *км* и вернулась обратно, затратив на весь путь 1 час 45 минут. Найдите собственную скорость лодки, если она проплывает 4 *км* по течению на $\frac{7}{8}$ *ч* быстрее, чем плот.

Ответ: 28 *км/ч*.

БЛОК 3. Движение по окружности

1. По окружности, длина которой равна 100 *м*, движутся два тела. Они встречаются через каждые 20 *с*, двигаясь в одном и том же направлении, и через каждые 4 *с*, двигаясь в противоположных направлениях. Определите скорость каждого тела в секунду.

Ответ: 15 *м/с* и 10 *м/с*.

2. По окружности, длина которой 999 *м*, движутся два тела в одном и том же направлении и встречаются через каждые 37 минут. Определите скорость каждого тела, если известно, что скорость первого в 4 раза больше скорости второго.

Ответ: 36 *м/мин* и 9 *м/мин*.

3. На соревнованиях по кольцевой трассе один лыжник проходил круг на 2 *мин* быстрее другого и через час обогнал его ровно на круг. За сколько минут каждый лыжник проходил круг?

Ответ: 10 *мин* и 12 *мин*.

4. На соревнованиях по картингу на кольцевой трассе один из картов проходил круг на 5 *мин* медленнее другого и через час отстал от него ровно на круг. За сколько минут каждый карт проходил круг.

Ответ: 20 *мин* и 15 *мин*.

5. Две точки A и B начинают движение по окружности с постоянными скоростями из диаметрально противоположных точек. Известно, что скорость точки A составляет 40 *м/с*. На сколько скорость точки B больше скорости точки A, если точки в первый раз поравнялись в тот момент, когда точка A прошла пять кругов.

Ответ: на 4 *м/с*.

6. Два тела движутся равномерно по окружности в одну сторону. Первое тело проходит окружность на 3 *с* быстрее второго и обгоняет второе тело каждые полторы минуты. За какое время каждое тело проходит окружность?

Ответ: 15 *с* и 18 *с*.

БЛОК 4. Задачи на работу и производительность труда

1. Бригада рабочих должна была изготовить 360 деталей. Изготовляя ежедневно на 4 детали больше, чем предполагалось по плану, бригада выполнила задание на один день раньше срока. Сколько дней бригада затратила на выполнение задания?

Ответ: 9 дней.

2. Два подъемных крана работая вместе, разгрузили баржу за 6 часов. За какое время может разгрузить баржу каждый кран, работая отдельно, если один из них может ее разгрузить на 5 часов быстрее, чем другой?

Ответ: 10 *ч*; 15 *ч*.

3. На посадке деревьев работали две бригады. Первая бригада ежедневно высаживала на 40 деревьев больше чем вторая и посадила 270 деревьев. Вторая бригада работала на два дня больше первой и посадила 250 деревьев. Сколько дней работала каждая бригада?

Ответ: 3 дня; 5 дней.

4. Производительность самоходной косилки в 5 раз выше производительности бригады косцов. Сколько дней потребуется бригаде косцов, чтобы скосить луг, если известно, что самоходная косилка и бригада косцов, работая вместе, могут закончить сенокос за три дня?

Ответ: 18 дней.

5. Уборку урожая с участка начал один комбайн. Через 2 часа к нему присоединился второй комбайн, и после 8 часов совместной работы они убрали 80% урожая. За сколько часов мог бы убрать урожай с участка каждый комбайн, если известно, что первому на это понадобилось бы на 5 часов больше, чем второму?

Ответ: 25 *ч*; 20 *ч*.

6. Бригада ежедневно должна была вспахивать 180 *га* поля. Перевыполняя план, бригада ежедневно вспахивала по 210 *га* и закончила работу за день до срока. Сколько гектаров вспахала бригада и за сколько дней?

Ответ: 1 260 *га*, за 6 дней.

7. Две автомашины, работая вместе, перевезли груз за 6 дней. Сколько дней понадобилось бы каждой машине в отдельности на перевозку всего груза, если известно, что одна из них могла бы перевезти весь груз на 5 дней быстрее, чем вторая.

Ответ: 10 дней; 15 дней.

8. Двое рабочих, работая вместе, могут выполнить заказ за 6 часов. Если первый будет работать 9 часов, а затем его сменит второй рабочий, то всю работу они закончат через 3 часа. За сколько часов каждый рабочий может выполнить все работу, работая отдельно?

Ответ: 12 *ч*; 12 *ч*.

9. Два каменщика, из которых второй начинает работу $1\frac{1}{2}$ днями позже первого, могут выложить стену за 7 дней. За сколько дней каждый из них отдельно мог бы выложить эту стену, если известно, что второй каменщик может выполнить эту работу на 3 дня скорее, чем первый?

Ответ: 14 дней; 11 дней.

10. Тракторная бригада должна засеять поле в 600 *га* за несколько дней. Ежедневно она засеивала на 15 *га* больше намеченного, а поэтому закончила работу на 2 дня раньше. За сколько дней бригада планировала засеять поле?

Ответ: 10 дней.

11. Два слесаря выполнили задание за 12 *ч*. Если бы половину задания выполнил первый, а оставшуюся часть второй, то первому потребовалось бы времени нам 5 *ч* больше, чем второму. За сколько часов каждый из них мог бы выполнить задание?

Ответ: 30 *ч*; 20 *ч*.

12. Одному шоферу дан наряд перевезти 600 *т* груза, а второму - 540 *т*. Первый шофер выполнил задание за 4 дня до намеченного срока, а второй - за 2 дня до срока. Сколько груза перевозил каждый шофер ежедневно, если первый перевозил на 4 *т* больше второго?

Ответ: 24 *т*; 20 *т*.

13. Для перевозки 90 *т* груза было затребовано некоторое количество машин. В связи с тем, что на каждую машину погрузили на 0,5 *т* меньше, дополнительно было затребовано 6 машин. Сколько машин было затребовано первоначально?

Ответ: 30 машин.

14. На обработку одной детали один рабочий затрачивает на 1 минуту меньше чем другой. Сколько деталей обрабатывает каждый из них за 4 часа, если первый обрабатывает за это время на 8 деталей больше чем второй?

Ответ: 48 деталей; 40 деталей.

15. Заводу было поручено изготовить 8 000 деталей к определенному сроку. Работая точно по графику, завод изготовил 25% заказа, а затем стал изготавливать ежедневно по 100 деталей сверх дневного задания и выполнил заказ за 2 дня до срока. Сколько дней понадобилось заводу для выполнения заказа?

Ответ: 14 дней.

16. Бригада рабочих должна была в определенный срок изготовить 272 детали. Через 10 дней после начала работы бригада стала перевыполнять дневную норму на 4 детали и уже за один день до срока изготовила 280 деталей. Сколько деталей бригада изготовит к сроку?

Ответ: 300 деталей.

17. По плану бригада должна была убрать урожай с 540 *га* к определенному сроку. После того как убрали 30% урожая, бригада, получив дополнительно комбайн, стала ежедневно убирать на 9 *га* больше, чем первоначально, и закончила уборку на 1 день раньше срока. Сколько дней продолжалась уборка урожая?

Ответ: 9 дней.

18. Бригада рабочих к определенному сроку должна была изготовить 360 деталей. Перевыполняя дневную норму на 9 деталей, бригада уже за 1 день до срока перевыполнила плановое задание на 5% Сколько деталей изготовит бригада к сроку, если будет продолжать работать с той же производительностью труда?

Ответ: 432 детали.

19. На вспашку всего поля первому трактору потребуется времени на 2 *ч* меньше, чем третьему, и на 1 *ч* больше, чем второму трактору. При совместной работе первого и второго тракторов поле может быть вспахано за 1 *ч* 12 *мин*. Сколько времени будет затрачено на вспашку поля при совместной работе всех трех тракторов?

Ответ: $\frac{30}{31}$ *ч*.

20. Двое рабочих, выполняя определенное задание вместе, могли бы закончить его за 12 дней. Если сначала будет работать только один из них, а когда он выполнит половину всей работы, его сменит второй рабочий, то все задание будет закончено за 25 дней. За сколько дней каждый рабочий в отдельности может выполнить всё задание?

Ответ: 30 дней; 20 дней.

БЛОК 5. Задачи на бассейн, который наполняется одновременно разными трубами

1. Бассейн наполняется водой через две трубы за 6 часов. Одна первая труба заполняет его на 5 часов скорее, чем одна вторая. За сколько времени каждая труба, действуя отдельно, может заполнить бассейн?

Ответ: 10 часов; 15 часов.

2. Бак наполняется двумя кранами одновременно за 3 часа. За какое время каждый кран в отдельности может наполнить бак, если известно, что первый кран может наполнить бак на 8 часов медленнее, чем второй?

Ответ: 12 часов; 4 часа.

3. Водонапорный бак наполняется двумя трубами за 2 часа 55 мин. Первая труба может наполнить его на 2 часа скорее, чем вторая. За сколько времени каждая труба, действуя отдельно, может наполнить бак?

Ответ: 5 часов; 7 часов.

4. Одна из двух труб может наполнить водой бак на 10 мин быстрее другой. За какое время может наполнить этот бак каждая труба, если при совместном действии этих труб в течение 8 *мин* было заполнено $\frac{2}{3}$ бака.

Ответ: 20 *мин*; 30 *мин*.

5. После того как первая труба за 1 час заполнила часть бассейна, включили вторую трубу, и они вместе заполнили бассейн через 3 часа. Если бы бассейн наполняла каждая труба в отдельности, то первой трубе понадобилось бы на 2 часа больше, чем второй. За сколько часов самостоятельной работы заполнит бассейн первая труба?

Ответ: 8 часов.

6. Через один кран ванна наполняется за 18 минут, через другой за 27 минут. На какое время нужно открыть оба крана, чтобы заполнить $\frac{5}{6}$ ванны?

Ответ: 9 минут.

7. Две трубы наполнят бассейн за 10 часов. Опрделите за сколько часов наполнит бассейн каждая труба в отдельности, если известно, что из первой трубы в час вытекает воды в 2 раза меньше, чем из второй.

Ответ: 30 часов; 15 часов.

8. Бассейн наполняется через первую трубу за 5 часов. Через 3 часа после открытия первой трубы открыли вторую трубу, через которую весь бассейн может наполниться за 6 часов. За сколько часов был наполнен весь бассейн?

Ответ: $4\frac{1}{11}$ *ч.*

9. Две трубы при совместном действии могут наполнить бассейн за 4 часа. Если бы сначала первая труба наполнила половину бассейна, а затем ее перекрыли и открыли вторую, то наполнение бассейна было бы закончено за 9 часов. За сколько часов может наполнить этот бассейн каждая труба в отдельности?

Ответ: 6 часов; 12 часов.

10. Двумя насосами бассейн должны были заполнить за 9 часов, но за час до окончания работы один насос пришлось выключить, и заполнение продолжалось в общей сложности 12 часов. За сколько часов можно заполнить бассейн каждым из насосов в отдельности?

Ответ: 12 часов; 36 часов.

БЛОК 6. Решите задачи на проценты составлением пропорции:

1. В питомнике было 82 000 саженцев клена, что составляло 4% всех саженцев питомника. 85% всех саженцев составляла сосна. Сколько саженцев сосны было в питомнике?

Ответ: 1 742 500 саженцев.

2. Смешали 200 *г* 10%-ного сахарного сиропа и 300 *г* 20%-ного сахарного сиропа. Концентрация (в %) полученной смеси составит?

Ответ: 16%.

3. Тракторная бригада вспахала за один день 24 *га* земли, что оставило 15% всего поля. Какова площадь поля?

Ответ: 160 *га*.

4. Цену товара сначала снизили на 20%, затем новую цену снизили еще на 25%. На сколько процентов всего снизили первоначальную цену товара?

Ответ: 40%.

5. Цена на фотоаппараты в течении месяца упала сначала на 18%, а затем на 20% и составила 1 640 тенге. Найдите первоначальную цену на фотоаппараты.

Ответ: 2 500 тенге.

6. Число легковых автомобилей состоящих на учете в автоинспекции города A составляет 60% от числа грузовых. Сколько процентов числа всех автомобилей составляют легковые автомобили?

Ответ: 37,5%.

7. Одно число равно 0,5, а второе число равно 0,3. Сколько процентов составляет второе число от разности первого и второго чисел?

Ответ: 150%.

8. Найдите число, 30% которого равны сумме наибольшего общего делителя и наименьшего общего кратного чисел 60; 48; 45.

Ответ: 2410.

9. Фирма покупает товар по оптовой цене, равной 2 300 тенге, и продает его в розницу на 6% дороже. Какова розничная цена товара?

Ответ: 2 438 тенге.

10. Число 5 составляет 20% от числа N. Найдите $\sqrt{N}$

Ответ: 5.

11. Число 11 составляет 25% от числа $3N-1$. Найдите N.

Ответ: 15.

12. Число 24 составляет 15% от числа N. Найдите 10% от N.

Ответ: 16.

13. Рабочий увеличил дневную выработку на 27 деталей и стал обрабатывать 297 деталей в день. На сколько процентов он увеличил производительность труда?

Ответ: на 10%.

14. Найдите 84% числа, если 28% его составляют 196.

Ответ: 588.

15. Число 646 увеличили на 10%, а затем уменьшили на 10%. Как изменилось число? Выразите изменение данного числа в процентах.

Ответ: Уменьшилось на 1%.

16. Число 400 увеличили на 5%, а затем вновь увеличили на 5%. Найдите полученное число.

Ответ: 441.

17. Один из катетов прямоугольного треугольника увеличили на 80%, а другой уменьшили на 75%. На сколько процентов изменилась площадь треугольника?

Ответ: Уменьшится на 55%.

18. Одну из диагоналей ромба увеличили на 40%, а другую уменьшили на 20%. На сколько процентов изменилась площадь ромба?

Ответ: Увеличилась на 12%.

19. Собрали 140 *кг* грибов, влажность которых составляла 98%. После подсушивания их влажность снизилась до 93%. Какова масса грибов после подсушивания?

Ответ: 40 *кг*.

20. Коммерсант купил некоторое изделие за 1 000 тенге. Он пустил его в продажу на 20% дороже первоначальной цены, но затем был вынужден снизить продажную цену на 10%. За какую сумму было продано изделие?

Ответ: 1 080 тенге.

БЛОК 7. Решите задачи на проценты алгебраическим методом:

1. Три бригады работали на лесозаготовках. В первой бригаде было 36% числа всех рабочих, число рабочих второй бригады было на 72 больше, чем в первой, а остальные 124 рабочих были в третьей бригаде. Сколько всего рабочих было в трех бригадах вместе?

Ответ: 700 человек.

2. В трех ящиках имеется всего 64,2 *кг* сахара. Во втором ящике находится $\frac{4}{5}$ того, что есть в первом ящике, в третьем 42,5% того, что есть во втором. Сколько сахара в каждом ящике?

Ответ: 30 *кг*; 24 *кг*; 10,2 *кг*.

3. Двое рабочих за смену вместе изготовили 72 детали. После того как первый рабочий повысил производительность труда на 15%, а второй на 25%, вместе за смену они стали изготавливать 86 деталей. Сколько деталей изготавливает каждый рабочий за смену после повышения производительности труда?

Ответ: 46 дет; 40 дет.

4. На складе было 100 *кг* ягод. Анализ показал, что в ягодах 99% воды. Через некоторое время содержание воды в ягодах упало до 98%. Сколько теперь весят ягоды?

Ответ: 50 *кг*.

5. Число 3 разбили на три слагаемых, причем второе слагаемое на 25% меньше первого, а третье слагаемое на 1 меньше второго. Найдите первое слагаемое.

Ответ: 1,6.

6. Высота прямоугольника составляет 75% его основания. Найдите периметр этого прямоугольника, зная, что площадь прямоугольника равна 48 $м^2$.

Ответ: 28 *м*.

7. Длину прямоугольника увеличили на 25%. На сколько процентов надо уменьшить ширину прямоугольника, чтобы его площадь не изменилась?

Ответ: 20%.

8. Свежая малина содержит 85% воды, а сухая - 20%. Найдите массу сухой малины, если свежая была весом 36 *кг*.

Ответ: 6,75 *кг*.

9. В городе в настоящее время 48 400 жителей. Известно, что население этого города увеличивалось ежегодно на 10%. Сколько жителей было в городе два года назад?

Ответ: 40 000 жителей.

10. Бригада косцов в первый день скосила половину луга и еще 2 *га*, а во второй день 25% оставшейся части луга и последние 6 *га*. Найдите площадь луга.

Ответ: 20 *га*.

11. 5% одного числа и 4% другого составляют 46, а 4% первого числа и 5% второго составляют 44. Найдите эти числа.

Ответ: 600; 400.

12. Цена на товар была повышена на 25%. На сколько процентов надо теперь ее понизить, чтобы получить первоначальную цену товара?

Ответ: 20%.

13. На сколько процентов увеличится объем прямоугольного параллелепипеда, если его длину и ширину увеличить на 10%, а высоту уменьшить на 10%?

Ответ: 8,9%.

14. Цену на машину сначала снизили на 15%, а затем повысили на 10%. Сколько процентов от первоначальной стоимости составляет цена машины после двух изменений ее цены?

Ответ: 93,5%.

15. Строительное управление подрядилось за год построить школу. В первом квартале было произведено 25% всего объема работ, во втором - 40% от остатка; в третьем - 60% от нового остатка. Какой процент работ от общего объема приходится на четвертый квартал?

Ответ: 18%.

16. Производительность труда при выполнении некоторой работы повысилась на 40%. На сколько процентов сократилось время, необходимое для выполнения этой работы?

Ответ: ≈ на 28,6%.

17. Влажность зерна составляет 25%. Когда 600 *кг* зерна просушили, оно стало на 100 *кг* легче. Какой стала влажность зерна после просушки?

Ответ: 10%.

18. Влажность свежей скошенной травы составляет 85%. Сколько испарилось воды из 1 *т* травы, если ее влажность после сушки составила 75%?

Ответ: 400 *кг*.

19. Цена товара была дважды снижена на одно и то же число процентов. На сколько процентов снижалась цена товара каждый раз, если его первоначальная стоимость 20 000 тенге, а окончательная – 11 250 тенге?

Ответ: на 25%.

20. Цена товара была дважды повышена на одно и то же число процентов. На сколько процентов повышалась цена товара каждый раз, если его первоначальная стоимость 6 000 тенге, а окончательная - 6 615 тенге?

Ответ: на 5%.

БЛОК 8. Задачи на концентрацию и процентное содержание

1. Морская вода содержит 5% соли по массе. Сколько пресной воды нужно добавить к 15 *л* морской воды, чтобы концентрация соли составляла 1,5%?

Ответ: 35 *л*.

2. Сколько *кг* воды необходимо выпарить из 100 *кг* массы, содержащей 90% воды, чтобы получить массу, содержащую 80% воды?

Ответ: 50 *кг*.

3. Имеются два слитка сплавов меди и олова. Первый содержит 40% меди, второй - 32% меди. Какого веса должны быть эти слитки чтобы после их совместной переплавки получить 8 *кг* сплава содержащего 35% меди?

Ответ: 3 *кг*; 5 *кг*.

4. Один раствор содержит 30% (по объему) азотной кислоты, а второй 55% азотной кислоты. Сколько нужно взять первого и второго растворов, чтобы получить 100 *л* 50%-ного раствора азотной кислоты?

Ответ: 20 *л*; 80 *л*.

5. К 80 *г* 15%-го раствора соли добавили 20 *г* воды. Определите концентрацию получившегося раствора.

Ответ: 12%.

6. Сплав меди и олова массой 16 *кг* содержит 55% олова. Сколько чистого олова надо добавить в сплав, чтобы получившийся новый сплав имел 60% олова?

Ответ: 2 *кг*.

7. Сколько воды следует добавить к 40 *кг* 5%-го раствора соли в воде, чтобы получить 4%-ный раствор?

Ответ: 10 *кг*.

8. Сплав олова и меди массой 24 *кг* содержит 45% меди Сколько чистого олова надо добавить, чтобы получить сплав, содержащий 40% меди?

Ответ: 3 *кг*.

9. Кусок сплава меди и цинка массой 72 *кг* содержит 45% меди. Сколько меди следует добавить к этому куску, чтобы полученный новый сплав содержал 60% меди?

Ответ: 27 *кг*.

10. Нержавеющая сталь состоит из сплава железа с хромом и никелем. Сколько хрома и никеля надо сплавить с 67,6 *кг* железа, если хрома в сплаве должно быть 15%, а никеля в 30 раз меньше, чем хрома?

Ответ: 12,4 *кг*.

11. Из двух сплавов, которые содержат 60% и 80% железа, требуется получить 40 *кг* сплава с 75%-ным содержанием железа. Сколько килограммов каждого сплава следует взять?

Ответ: 10 *кг*; 30 *кг*.

12. К 20 *кг* 4%-го раствора соли в воде добавили 30 *кг* 5%-го раствора смеси, а затем 8% воды от полученного раствора выпарили. Вычислите процент концентрации соли в полученном растворе.

Ответ: 5%.

13. Смешали 300 *г* 50%-го и 100 *г* 30 %-го раствора кислоты. Определите процентное содержание кислоты в полученной смеси.

Ответ: 45%.

14. Сплав золота с серебром, содержащий 80 *г* золота, сплавлен со 100 *г* чистого золота. В результате содержание золота в сплаве повысилось по сравнению с первоначальным содержанием на 20%. Сколько серебра в сплаве?

Ответ: 120 *г*.

15. Чтобы получить 50%-ный раствор кислоты, надо к 30 *г* 15%-го раствора кислоты добавить 75%-ный раствор этой же кислоты. Найдите количество 75%-го раствора кислоты, которое надо добавить.

Ответ: 42 *г*.

16. Сплав алюминия и цинка содержит 82% алюминия. После добавления 18 *кг* цинка содержание алюминия в сплаве понизилось до 70%. Вычислите, сколько алюминия и цинка в отдельности стало содержаться в сплаве?

Ответ: 86,1 *кг*; 36,9 *кг*.

17. Одна бочка содержит смесь воды и спирта. где спирта содержится 40%, а в другой бочке спирт составляет 30%. Сколько следует взять из каждой бочки этой смеси, чтобы составить 12 декалитров спиртовой смеси, в которой спирт и вода были бы в отношении $3:5$?

Ответ: 9 *дкл*; 3 *дкл*.

18. Два слитка состоят из сплава цинка, меди и олова. В первом слитке 40% олова, а во втором - 26% меди. Процентное содержание цинка в первом и во втором слитке одинаковое. Сплавив 150 *г* первого и 250 *г* второго, получили новый сплав, в котором оказалось 30% цинка. Сколько граммов олова содержится в новом сплаве?

Ответ: 170 *г*.

19. В одной тонне руды содержится определенное количество железа. После удаления из руды 400 *кг* примесей, содержащих 12,5% железа, в оставшейся руде содержание железа повысилось на 20%. Какое количество железа еще осталось в руде?

Ответ: 375 *кг*.

20. Сплав состоит из меди и цинка. В первом куске меди содержится 60% и цинка 40%, а во втором это соотношение равно $7:3$. Сколько следует взять от каждого куска, чтобы получить 1 *кг* нового сплава, в котором медь и цинк находились бы в отношении $11:5$?

Ответ: 125 *г*; 875 *г*.

БЛОК 9. Задачи, в которых используется формула числа

1. Найдите двузначное число, зная, что число его единиц двумя больше числа десятков и что произведение искомого числа на сумму его цифр равно 144.

Ответ: 24.

2. Дано двузначное число с одинаковыми цифрами. Если в старший разряд добавить одну единицу, а в младший две и полученное число умножить на данное, то произведение будет равно 2 464. Найдите данное число.

Ответ: 44.

3. Сумма цифр двузначного числа равна 12. Если цифры этого числа переставить, то получится число, большее искомого на 18. Найдите это число.

Ответ: 57.

4. Сумма цифр двузначного числа равна 6. Отношение этого числа к числу, у которого переставлены цифры, равно $\frac{4}{7}$. Найдите эти числа.

Ответ: 24; 42.

5. Сумма цифр трехзначного числа, у которого в середине стоит нуль, равна 9. Если поменять местами первую и последнюю цифры, то новое число будет на 99 больше данного. Найдите данное число.

Ответ: 405.

6. Если к задуманному двузначному числу приписать слева цифру два, то полученное трехзначное число будет в 9 раз больше первоначального. Какое число задумано?

Ответ: 25.

7. Дано натуральное двузначное число. Разность квадратов этого числа и числа, записанного в обратном порядке, равна 495. Найдите сумму этих чисел.

Ответ: 55.

8. Если двузначное число разделить на сумму его цифр, то получится в частном 6 и в остатке 2. Если же это число разделить на произведение его цифр, то получится в частном 5 и в остатке 2. Найдите это число.

Ответ: 32.

9. Если двузначное число разделить на сумму его цифр, то в частном получится 8 и в остатке 4. Если же из этого числа вычесть 63, то получится двузначное число, записанное теми же цифрами, но в обратном порядке. Найдите это число.

Ответ: 92.

10. Сумма цифр искомого двузначного числа равняется 11. Если искомое число разделить на число, записанное теми же цифрами, но в обратном порядке, то в частном получится 2 и в остатке 7. Найдите это число.

Ответ: 83.

11. Двузначное число на 14 больше произведения своих цифр и на 45 меньше числа, записанного теми же цифрами, но в обратном порядке. Найдите это число.

Ответ: 38.

12. Двузначное число на 19 больше суммы квадратов своих цифр и на 9 больше числа, записанного теми же цифрами, но в обратном порядке. Найдите это число.

Ответ: 32.

13. Сумма квадратов цифр некоторого двузначного числа на 4 больше удвоенного произведения этих цифр. После деления этого двузначного числа на сумму его цифр в частном получается 4 и в остатке 9. Найдите исходное число.

Ответ: 57.

14. Произведение цифр двузначного числа в два раза больше суммы его цифр. Если от искомого числа отнять 27, то получится число, написанное теми же цифрами, но в обратном порядке. Найдите это число.

Ответ: 63.

15. Двузначное число в 6 раз больше суммы его цифр. Если из этого числа вычесть произведение его цифр, то получится 34. Найдите исходное число.

Ответ: 54.

16. В двузначном положительном числе сумма квадратов цифр в 2,5 раза больше суммы его цифр и на единицу больше утроенного произведения этих цифр. Найдите это число.

Ответ: 13 или 31.

БЛОК 10. Задачи, в которых слагаемые пропорциональны некоторым числам (или дано их отношение)

1. Скорости двух всадников относятся как $\frac{2}{5}:\frac{7}{20}$ Скорость первого всадника больше скорости второго на 1,5 *км/ч*.

Найдите скорость первого всадника.

Ответ: 12 *км ч*.

2. Скорость вертолета на 85 *км/ч* больше скорости автомобиля, а отношение их скоростей равно $35:18$. Определите скорости автомобиля и вертолета.

Ответ: 90 *км/ч*; 175 *км/ч*.

3. Разделите (разбейте на сумму трех слагаемых) число 30 прямо пропорционально числам 1; 2 и 7. Найдите большее число.

Ответ: 21.

4. Мастер за три дня изготовил 48 деталей, причем количество деталей, которое он сделал за первый, второй и третий день, пропорционально числам 5; 4 и 3. Сколько деталей он сделал за два первых дня?

Ответ: 36 деталей.

5. Два положительных числа относятся как $3:2$. Если меньшее из них разделить на 4, а большее разделить на 9, то первое частное будет на 4 больше второго частного. Найдите эти числа.

Ответ: 72; 48.

6. Для приготовления фарфора употребляют глину, гипс и песок в отношении $6,25:0,25:0,5$. Сколько весит фарфоровая чашка, если она содержит глины на 184 *г* больше, чем песка?

Ответ: 224 *г*.

7. Три числа обратно пропорциональны числам 1; 2 и 3. Зная что, что первое число больше второго на 2,16, найдите эти числа.

Ответ: 4,32; 2,16; 1,44.

8. Три числа обратно пропорциональны числам $\frac{2}{3}$; 0,4; 0,75. Третье число на 16 меньше суммы двух остальных. Найдите эти числа.

Ответ: 9; 15; 8.

9. Сумма двух дробей равняется $1\frac{23}{63}$. Их числители относятся, как $4:5$, а знаменатели, как $3:7$. Найдите эти дроби.

Ответ: $\frac{8}{9}$; $\frac{10}{21}$.

10. Числители трех дробей пропорциональны числам 1; 2; 5, а знаменатели соответственно пропорциональны числам 1; 3; 7. Среднее арифметическое этих дробей равно $\frac{200}{441}$. Найдите эти дроби.

Ответ: $\frac{4}{7}$; $\frac{8}{21}$; $\frac{20}{49}$.

БЛОК 11. Задачи на составление систем уравнений

1. С двух участков площадью 80 *га* и 120 *га* собрали 7 200 *ц* зерновых. Сколько центнеров зерновых собрали с 1 *га* на каждом участке, если с каждых 3 *га* первого участка собирали на 10 *ц* зерновых больше, чем с 2 *га* второго участка?

Ответ: 30 *ц*; 40 *ц*.

2. Найдите 2 числа, если известно, что сумма удвоенного первого и утроенного второго равна 23, а учетверенное второе больше утроенного первого на 8.

Ответ: 4; 5.

3. Если числитель дроби уменьшить на единицу, то дробь становится равной $\frac{1}{5}$, а если знаменатель ее уменьшить на единицу, то дробь становится равной $\frac{1}{4}$. Найдите эту дробь.

Ответ: $\frac{6}{25}$.

4. Если увеличить ширину прямоугольника на 10%, а длину на 20%, то его периметр увеличится на 16 см. Если же уменьшить ширину на 20%, а длину на 10%, то периметр уменьшится на 14 см. Найдите длину и ширину прямоугольника.

Ответ: 30 *см*; 20 *см*.

5. Среднее арифметическое двух чисел равно 17, а среднее геометрическое 15. Вычислите эти числа.

Ответ: 9; 25 .

6. Моторная лодка и парусник, находясь на озере, на расстоянии 30 *км* друг от друга, движутся навстречу друг другу, и встречаются через 1 час. Если бы моторная лодка находилась в 20 *км* от парусника и догоняла его, то на это потребовалось бы 3 часа 20 минут. Определите скорости лодки и парусника.

Ответ: 18 *км/ч*; 12 *км/ч*.

7. Если к числителю и знаменателю обыкновенной дроби прибавить по 1, то дробь станет равна $\frac{1}{2}$, а если сложить квадраты числителя и знаменателя исходной дроби, то получится 146. Найдите исходную дробь.

Ответ: $\frac{5}{11}$.

8. Задуманы два натуральных числа, произведение которых равно 720. Если первое число разделить на второе, то в частном получится 3 и в остатке 3. Какие числа задуманы?

Ответ: 48; 15.

9. Среднее пропорциональное двух чисел на 12 больше меньшего из этих чисел, а среднее арифметическое тех же чисел на 24 меньше большего из них. Найдите эти числа.

Ответ: 6; 54.

10. На ферме коров кормили несколько дней двумя видами корма. В 1 *ц* первого вида корма содержится 15 *кг* белка и 80 *кг* углеводов, в 1 *ц* второго вида содержится 5 *кг* белка и 30 *кг* углеводов. Сколько центнеров составляет каждый вид корма, если весь корм составляет 10,5 *ц* белка и 58 *ц* углеводов?

Ответ: 50 *ц*; 60 *ц*.

11. Найдите трехзначное число, в котором число единиц меньше числа сотен на 1, число единиц меньше числа десятков на 2, сумма цифр меньше всего числа на 333.

Ответ: 342.

12. Найдите трехзначное число, у которого первая цифра в два раза больше последней, если известно, что сумма его цифр меньше самого числа на 837, и искомое число больше числа, записанного теми же цифрами в обратном порядке, на 396.

Ответ: 854.

13. За 30 рубашек и 25 платьев нужно заплатить 14 750 тенге. Однако при 20% скидке на рубашки и 10% скидке на платья, разница между стоимостью платьев и рубашек составляет 3 075 тенге. Определите стоимость одного платья и стоимость одной рубашки.

Ответ: 350 тенге; 200 тенге.

14. Одна бочка содержит смесь спирта с водой в отношении $2:3$, а другая – в отношении $3:7$. По сколько ведер нужно взять из каждой бочки, чтобы составить 12 ведер смеси, в которой спирт и вода были бы в отношении $3:5$?

Ответ: 9 ведер; 3 ведра.

15. За 7 часов катер прошел 60 *км* по течению реки и 64 *км* против течения. В другой раз катер за 7 часов прошел 80 *км* по течению реки и 48 *км* против течения. Определите собственную скорость катера и скорость течения реки.

Ответ: 18 *км/ч*; 2 *км/ч*.

16. На опытном поле под рожь отвели участок в 20 *га*, а под пшеницу - в 30 *га*. В прошлом году с обоих участков собрали 2300 *ц* зерна. В этом году урожайность ржи повысилась на 20%, а пшеницы - на 30%, и поэтому собрали зерна на 610 *ц* больше, чем в прошлом году. Какой была урожайность каждой культуры в этом году?

Ответ: 48 *ц*; 65 *ц*.

17. Легковой автомобиль проехал за 2 *ч* на 10 *км* больше, чем грузовой за 3 *ч*. Если уменьшить скорость легкового автомобиля на 25%, а грузового на 20%, то грузовой автомобиль проедет за 5 *ч* на 20 *км* больше, чем легковой автомобиль за 3 *ч*. Найдите скорость каждого автомобиля.

Ответ: 80 *км/ч*; 50 *км/ч*.

18. Моторная лодка спустилась вниз по течению реки на 18 *км* и вернулась обратно, затратив на весь путь 1 *ч* 45 *мин.* Найдите собственную скорость лодки, если известно, что 6 *км* по течению реки лодка проплывает на 5 минут быстрее, чем против течения.

Ответ: 21 *км/ч* .

19. Имеется два сплава золота и серебра. В первом количества этих металлов находятся в отношении $2:3$, во втором - в отношении $3:7$. Сколько необходимо взять каждого сплава, чтобы получить 8 *кг* нового сплава, в котором количества золота и серебра были в отношении $5:11$?

Ответ: 1 *кг*; 7 *кг*.

20. Кусок материи стоит 45 000 тенге. Если в куске было бы на 15 *м* больше, а каждый метр стоил на 100 тенге дешевле, то стоимость материи была бы прежней. Сколько стоил 1 м материи первоначально?

Ответ: 600 тенге.

ГЛАВА VII. НАЧАЛА АНАЛИЗА

§ 1. ФУНКЦИЯ И ЕЕ СВОЙСТВА

БЛОК 1. Найдите область определения функции:

А

1) $y = 7^{\frac{\sqrt{x}}{x-3}}$

2) $y = \sqrt{\sin x}$

3) $y = \sqrt{\operatorname{tg} x}$

4) $y = \lg \operatorname{ctg} x$

5) $y = \arcsin(x-3)$

6) $y = \arccos(2x+1)$

7) $y = \sqrt{|x|-2}$

8) $y = \lg|1-x|$

9) $y = \dfrac{1}{\sqrt{2+x-x^2}} + \lg(2x-1)$

10) $y = \dfrac{1}{\sin(3x-2)}$

11) $y = \arccos(x-3) + \operatorname{arcctg}\sqrt{x-2}$

12) $y = \sqrt{5-x-\dfrac{6}{x}}$

13) $y = \dfrac{1}{\sqrt{14+5x-x^2}} + \sqrt{x^2-x-20}$

14) $y = \sqrt{\dfrac{x^2-7x+12}{2x-x^2+3}}$

15) $y = 2^{\sqrt{2-x}} - \sqrt{2-\sin x}$

16) $y = \sqrt{x} + \sqrt[3]{\dfrac{1}{x-2}} - \lg(2x-3)$

17) $y = 2^{\sqrt{4-x^2}} + \dfrac{1}{x-1}$

18) $y = \dfrac{\sqrt{x^2-2x}}{\log_5(x-1)}$

19) $y = \lg\dfrac{x-5}{x^2-10x+24} - \sqrt[3]{x-5}$

20) $y = \log_{\pi}\left(9-4x^2\right) + \dfrac{5}{\sqrt[4]{x+1}}$

21) $y = \log_3 \log_{\frac{1}{2}} x$

22) $y = \dfrac{1}{3-\log_3(x-3)}$

23) $y=\dfrac{\lg\left(3-2x-x^{2}\right)}{\sqrt{x}}$

24) $y=\arcsin\dfrac{x-3}{2}-\lg(4-x)$

25) $y=\sqrt{3-x}+\arccos\dfrac{3-2x}{5}$

26) $y=\sqrt{\dfrac{x^{2}+2x+1}{x-1}}$

27) $y=\log_{x-3}2$

B

28) $y=\dfrac{\sqrt{2x}}{\sqrt{x+1}-\sqrt{x-2}}$

29) $y=\sqrt{\sin x+\cos x}$

30) $y=\lg\cos\dfrac{x}{2}$

31) $y=\sqrt{\lg\sin x}$

32) $y=\dfrac{1}{\arcsin 2x}$

33) $y=\sqrt{(\sin x+\cos x)^{2}-1}$

34) $y=\sqrt[4]{\dfrac{1}{2}\log_{4}16-\log_{8}\left(x^{2}-4x+3\right)}$

35) $y=\sqrt{\log_{0,1}\dfrac{3x-1}{2x+1}}$

36) $y=\sqrt[6]{\dfrac{x}{x^{2}-5x+6}}+\sqrt[5]{\dfrac{2x}{x^{2}-4x+3}}$

37) $y=\arccos\dfrac{2x}{1+x^{2}}$

38) $y=\sqrt{\cos x}+\sqrt{\dfrac{x-1}{3-x}}$

39) $y=\dfrac{\sqrt{12+x-x^{2}}}{x(x-2)}$

40) $y=\log_{5}\log_{0{,}5}\dfrac{3-x}{x+2}$

41) $y=\arcsin 3^{x}+\dfrac{1}{x^{3}+x+2}$

42) $y=\sqrt{\dfrac{3^{x}-4^{x}}{2x^{2}-x-6}}$

43) $y=\log_{|x|-4}3-\sqrt{3-x}$

ОТВЕТЫ

1) $[0;3)\cup(3;\infty)$

2) $[2\pi k;\ \pi+2\pi k]$

3) $\left[\pi k;\ \frac{\pi}{2}+\pi k\right)$

4) $\left(\pi k;\ \frac{\pi}{2}+\pi k\right)$

5) $[2;4]$

6) $[-1;0]$

7) $(-\infty;-2]\cup[2;\infty)$

8) $(-\infty;1)\cup(1;\infty)$

9) $\left(\frac{1}{2};2\right)$

10) $x\neq\frac{2}{3}+\frac{\pi k}{3}$

11) $[2;4]$

12) $(-\infty;0)\cup[2;3]$

13) $[5;7)$

14) $(-1;3)\cup(3;4]$

15) $(-\infty;2]$

16) $\left(\frac{3}{2};2\right)\cup(2;\infty)$

17) $[-2;1)\cup(1;2]$

18) $(2;\infty)$

19) $(4;5)\cup(6;\infty)$

20) $\left(-1;\frac{3}{2}\right)$

21) $(0;1)$

22) $(3;30)\cup(30;\infty)$

23) $(0;1)$

24) $[1;4)$

25) $[-1;3]$

26) $\{-1\}\cup(1;\infty)$

27) $(3;4)\cup(4;\infty)$

28) $[2;\infty)$

29) $\left[-\frac{\pi}{4}+2\pi k;\frac{3\pi}{4}+2\pi k\right]$

30) $(-\pi+4\pi k;\ \pi+4\pi k)$

31) $x=\frac{\pi}{2}+2\pi k$

32) $\left[-\frac{1}{2};0\right)\cup\left(0;\frac{1}{2}\right]$

33) $\left[\pi k;\ \frac{\pi}{2}+\pi k\right]$

34) $[-1;1)\cup(3;5]$

35) $\left(\frac{1}{3};2\right]$

36) $[0;1)\cup(1;2)\cup(3;\infty)$

37) $(-\infty;\infty)$

38) $\left[1;\frac{\pi}{2}\right]$

39) $[-3;0)\cup(0;2)\cup(2;4]$

40) $\left(\frac{1}{2};3\right)$

41) $(-\infty;-1)\cup(-1;0]$

42) $\left(-\infty;-\frac{3}{2}\right)\cup[0;2)$

43) $(-\infty;-5)\cup(-5;-4)$

***В ответах параметр** $k\in\mathbb{Z}$

БЛОК 2. Найдите область значений функции:

А

1) $y = 3^{-x}$

2) $y = -2\sin\left(x - \frac{\pi}{4}\right) + 3$

3) $y = 16 - 6\sin 2x$

4) $y = -x^4 + 2x^2 + 5$

5) $y = \frac{3}{4}\cos^2\left(x - \frac{\pi}{4}\right) - 1$

6) $y = 10^{1-\cos x}$

7) $y = \sin\left(\frac{\pi}{2} - x\right) - \cos(\pi + x)$

8) $y = 4x^2 + 8x + 10$

9) $y = 2\sin^2 x - \cos 2x$

10) $y = \frac{1 + 8\cos^2 x}{4}$

11) $y = 1 - 2|\cos x|$

12) $y = (\sin x - \cos x)^2$

13) $y = 0{,}3^{x+1} - 10$

14) $y = |x - 4| - 2$

В

15) $y = \frac{3x}{x^2 + 1}$

16) $y = \frac{x + 2}{2x - 3}$

17) $y = 2\cos^2\frac{x}{2} + \operatorname{tg} x \cdot \operatorname{ctg} x$

18) $y = \frac{x - 3}{2x + 2}$

19) $y = \frac{x^2 + 1{,}25}{x + 1}$

20) $y = \frac{x^2 + 3}{x + 1}$

21) $y = \frac{|x - 2|}{x - 2} + 2$

22) $y = \lg(-x^2 - 2x + 9)$

23) $y = 1 - \frac{5}{\sqrt{x - 1} + 1}$

24) $y = 2 - \frac{3}{2x^2 - 8x + 9}$

25) $y = -\sqrt{-3x^2 + 12x - 3}$

26) $y = 4\operatorname{tg} x \cdot \cos x$

27) $y=\cos^4\frac{x}{5}-\sin^4\frac{x}{5}$

28) $y=\frac{1}{\sin^6 x+\cos^6 x}$

29) $y=\sqrt{x}+\frac{1}{\sqrt{x}}$

30) $y=3\sin x-4\cos x$

31) $y=\frac{x^2+2}{x^2+3}$

32) $y=\frac{x^2+5x-6}{x-1}$

33) $y=\frac{x^2+x-6}{x^2-x-2}$

34) $y=\frac{x}{1+x^2}$

ОТВЕТЫ

1) $(0;\infty)$

2) $[1;5]$

3) $[10;22]$

4) $(-\infty;6]$

5) $\left[-1;-\frac{1}{4}\right]$

6) $[1;100]$

7) $[-2;2]$

8) $[6;\infty)$

9) $[-1;3]$

10) $\left[\frac{1}{4};\frac{9}{4}\right]$

11) $[-1;1]$

12) $[0;2]$

13) $(-10;\infty)$

14) $[-2;\infty)$

15) $\left[-\frac{3}{2};\frac{3}{2}\right]$

16) $\left(-\infty;\frac{1}{2}\right)\cup\left(\frac{1}{2};\infty\right)$

17) $(1;2)\cup(2;3)$

18) $\left(-\infty;\frac{1}{2}\right)\cup\left(\frac{1}{2};\infty\right)$

19) $(-\infty;-5]\cup[1;\infty)$

20) $(-\infty;-6]\cup[2;\infty)$

21) $\{1;3\}$

22) $(-\infty;1]$

23) $[-4;1)$

24) $[-1;2)$

25) $[-3;0]$

26) $(-4;4)$

27) $[-1;1]$

28) $[1;4]$

29) $[2;\infty)$

30) $[-5;5]$

31) $\left[\frac{2}{3};1\right)$ 32) $(-\infty;7)\cup(7;\infty)$ 33) $(-\infty;1)\cup\left(1;\frac{5}{3}\right)\cup\left(\frac{5}{3};\infty\right)$

34) $\left[-\frac{1}{2};\frac{1}{2}\right]$

БЛОК 3. Установите четность или нечетность функции:

А

1) $y=2x^2-x^4$

2) $y=2^{-x^2}$

3) $y=\frac{3^x+3^{-x}}{2}$

4) $y=\frac{3^x-3^{-x}}{2}$

5) $y=3^{|x|}$

6) $y=\frac{|x|}{x}$

7) $y=x^2-\cos x$

8) $y=2\operatorname{tg}x+\sin 2x$

9) $y=x^2\cdot\sin x$

10) $y=\frac{2^x}{x+2}$

11) $y=\frac{1+\cos x}{1-\cos x}$

12) $y=\frac{2\sin x}{1+\cos x}$

13) $y=\sqrt{\sin x}$

14) $y=\sqrt{\cos x}$

15) $y=\lg\cos x$

16) $y=\sqrt[3]{1-x}+\sqrt[3]{1+x}$

17) $y=\frac{x^3}{x^2-4}$

18) $y=\frac{x}{3}-\operatorname{ctg}3x$

19) $y=\frac{x}{1-x^3}$

20) $y=\frac{\cos 2x-x^2}{\cos x}$

21) $y=\frac{x^3+\sin 2x}{\cos x}$

22) $y=x\cdot|\sin x|\cdot\sin^3 x$

23) $y=\cos x\cdot\sqrt{x^4-2x^2}$

24) $y=x\cdot 2^{-x^2}$

В

25) $y=\lg\frac{1-x}{1+x}$

26) $y=\frac{x^3+\sin 3x}{\sin 3x-x}$

27) $y=(x+3)\cdot|x-1|+(x-3)\cdot|x+1|$

28) $y=\frac{|x-4|}{x+2}-\frac{|x+4|}{x-2}$

29) $y=\frac{x^3-2x^2}{x+1}-\frac{x^3+2x^2}{x-1}$

30) $y=\frac{(x-1)^5}{(3x+4)^3}+\frac{(x+1)^5}{(3x-4)^3}$

31) $y=\sqrt[3]{(x+1)^2}+\sqrt[3]{(x-1)^2}$

32) $y=\lg\left(x+\sqrt{1+x^2}\right)$

33) $y=\left(2-x^3\right)\cdot\left(2+x^3\right)\cdot\cos 2x$

34) При каких значениях коэффициента p функция $y=(x+1)^2+p\cdot(x-1)^2$ является нечетной?

35) Известно, что $f(x)=x^8+ax^4+1$ и $f(2)=305$. Найдите $f(-2)$ и значение коэффициента a.

36) Зная, что $f(x)=\frac{15\,552}{x^5+bx^3}$ и $f(3)=16$, найдите $f(-3)$ и значение коэффициента b.

37) Найдите значение функции $\varphi=\frac{3f(x)-2f(-x)}{2g(x)-3g(-x)}$ в точке x_0, если известно, что функция $y=f(x)$ - четная, функция $y=g(x)$ - нечетная, $f(x_0)=5$. $g(x_0)=1$

38) Найдите значение функции $\varphi=\frac{f(x)}{g(-x)}-\frac{3g(x)}{f(-x)}$ в точке x_0, если известно, что функция $y=f(x)$ - четная, функция $y=g(x)$ - нечетная, $f(x_0)=3$, $g(x_0)=-1$.

39) Найдите значение функции $\varphi = f(x) \cdot g(-x) - f(-x)$ в точке x_0, если известно, что функция $y = f(x)$ - четная, функция $y = g(x)$ - нечетная, $f(x_0) = -3$, $g(x_0) = -2$.

ОТВЕТЫ

1) Четная	2) Четная	3) Четная
4) Нечетная	5) Четная	6) Нечетная
7) Четная	8) Нечетная	9) Нечетная
10) Функция общего вида	11) Четная	12) Нечетная
13) Функция общего вида	14) Четная	15) Четная
16) Четная	17) Нечетная	18) Нечетная
19) Функция общего вида	20) Четная	21) Нечетная
22) Четная	23) Четная	24) Нечетная
25) Нечетная	26) Четная	27) Нечетная
28) Четная	29) Нечетная	30) Четная
31) Четная	32) Нечетная	33) Четная

34) -1

35) $f(-2) = 305$; $a = 3$

36) $f(-3) = -16$; $b = 27$

37) 1 38) 4 39) -3

БЛОК 4. Найдите наименьший положительный период функции:

А

1) $y = \cos 3x$ 2) $y = \cos\left(\frac{x}{4}\right)$ 3) $y = \mathrm{tg}\,(2x)$

4) $y = \operatorname{ctg} \frac{x}{5}$

5) $y = \sin\left(5x + \frac{\pi}{3}\right)$

6) $y = \operatorname{ctg}\left(\frac{5}{8}x + \frac{\pi}{4}\right)$

7) $y = \operatorname{ctg}\left(\frac{x - \pi}{4}\right)$

8) $y = \cos\left(1 - \frac{2}{3}x\right)$

B

9) $y = \sin 2x + \cos 3x$

10) $y = \sin\left(\frac{3x}{2}\right) + \sin\left(\frac{2x}{3}\right)$

11) $y = \sin 5x - \cos 4x + 1$

12) $y = 2\sin\left(\frac{x}{4}\right) - 3\sin\left(\frac{x}{3}\right)$

13) $y = \operatorname{tg}\left(\frac{2x}{3}\right) - 4\operatorname{ctg}\left(\frac{3x}{2}\right) - 2$

14) $y = \sin\left(\frac{3x}{4}\right) - 3\cos\left(\frac{5x}{8}\right) + \cos 5x$

15) $y = \sin\left(2x + \frac{\pi}{4}\right) \cdot \cos\left(2x + \frac{\pi}{4}\right)$

16) $y = \sin 3x \cdot \cos 3x$

17) $y = \sin^2 2x$

18) $y = \operatorname{tg} \frac{3x}{4} \cdot \cos^2 \frac{3x}{4}$

19) $y = \operatorname{tg} 2x + \operatorname{ctg} 3x + \cos 5x$

20) $y = \cos x \cdot \cos 6x$

21) $y = \sin x \cdot \sin 4x - \cos x \cdot \cos 4x$

22) $y = \sin 3x \cdot \cos x + \cos 3x \cdot \sin x$

23) $y = 3\sin 4x + 6\sin x + \sin(x - \pi) + 5\sin(x + \pi)$

24) $y = \cos \frac{x}{3} + \operatorname{tg} \frac{x}{5}$

25) $y = \sin \frac{3x}{4} + 5\cos \frac{2x}{3}$

ОТВЕТЫ

1) $\frac{2\pi}{3}$ 2) 8π 3) $\frac{\pi}{2}$ 4) 5π 5) $\frac{2\pi}{5}$

6) $\frac{8\pi}{5}$ 7) 4π 8) 3π 9) 2π 10) 12π

11) 2π 12) 24π 13) 6π 14) 16π 15) $\frac{\pi}{2}$

16) $\frac{\pi}{3}$ 17) $\frac{\pi}{2}$ 18) $\frac{4\pi}{3}$ 19) 2π 20) 2π

21) $\frac{2\pi}{5}$ 22) $\frac{\pi}{2}$ 23) $\frac{\pi}{2}$ 24) 30π 25) 24π

БЛОК 5. Решите задачи по теме «сложные функции»:

А

1) Задана функция $f(x)=\frac{1-x}{1+x}$. Найдите $f(x+1)$.

2) Дано $f(x)=\frac{x-1}{x+1}$. Определите $f(x^2)$.

3) Дано $f(x)=x^3-x$, $\varphi(x)=\sin 2x$. Найдите $f\left(\varphi\left(\frac{\pi}{12}\right)\right)$.

В

4) Найдите $f(x)$, если $f\left(\frac{1}{x}\right)=\frac{1}{x+1}$, $x>0$.

5) Найдите $f(x)$, если $f\left(\frac{x}{x+1}\right)=x^2$.

6) Найдите $f(x)$, если $f(x+1)=x^2-3x+2$.

7) Функция $g(x)=2x+1$. Сложная функция $f(g(x))=4x^2-4x-3$. Найдите $f(x)$.

8) Дано $g(x)=1-2x$. Найдите $g(g(x))$.

9) Дано $f(x)=\frac{5x+1}{x-4}$. Найдите $f(x+2)-f(x+6)$.

10) Дано $g(x)=3-2x$ и $f(g(x))=6x+4$. Найдите $f(x)$.

11) Дано $g(x)=2x+1$ и $f(g(x))=4x^2+6x$. Найдите $f(x)$.

12) Дана функция $f(x)=x^2+1$, где $x\geq 0$. Найдите функцию $g(x)$, такую, чтобы выполнялось условие $f(g(x))=x$.

13) Дана функция $f(x)=x^2-2$, где $x\geq 0$. Найдите функцию $g(x)$, такую, чтобы выполнялось условие $g(f(x))=x$.

14) Пусть $f(2x-3)=4x-5$. Найдите $f(f(1))$.

ОТВЕТЫ

1) $-\frac{x}{x+2}$ **2)** $\frac{x^2-1}{x^2+1}$ **3)** $-\frac{3}{8}$

4) $f(x)=\frac{x}{x+1}$ **5)** $f(x)=\left(\frac{x}{1-x}\right)^2$ **6)** $f(x)=x^2-5x+6$

7) $f(x)=x^2-4x$ **8)** $4x-1$ **9)** $\frac{84}{x^2-4}$

10) $f(x)=13-3x$ **11)** $f(x)=x^2+x-2$ **12)** $g(x)=\sqrt{x-1}$

13) $g(x)=\sqrt{x+2}$ **14)** 7

<u>БЛОК 6</u>. Найдите обратные функции к следующим функциям:

А

1) $y=3x$ **2)** $y=2x-5$ **3)** $y=-x+1$

4) $y=x^3$ **5)** $y=\frac{3}{5x}$

В

6) $y=\dfrac{x+3}{2x-1}$

7) $y=\dfrac{3}{x-4}$

8) $y=2\sin 3x$

9) $y=\dfrac{1}{2}\cos x$

10) $y=\operatorname{tg}\dfrac{x}{2}$

11) $y=\dfrac{1}{x-1}$

12) $y=3^{x-2}+1$

13) $y=3^{-x}-2$

14) $y=2^{3-x}+5$

15) $y=\log_5(x+1)-3$

16) $y=(x-1)^{\frac{2}{3}}$

17) $y=\sqrt[3]{2x-5}$

18) $y=(x-3)^2+1$

19) $y=3-\log_5(x-6)$

20) $y=x^2-4x+7$; $x\in(-\infty;2]$

21) $y=x^2+4$; $x\le 0$

22) $y=2x+2$; $x\in[1;3]$

23) $y=\begin{cases}2x+1, & x\in(-\infty;2]\\ x^2+1, & x\in(2;\infty)\end{cases}$

24) $y=1+\lg(x+2)$

25) $y=\log_x 2$

26) $y=\dfrac{x-1}{x+1}$

27) $y=\dfrac{x^2+3x}{x^2-5x}$

28) Найдите значение функции, которая является обратной к функции $f(x)=-2+0{,}5x$, при значении аргумента, равном 1.

29) Найдите значение функции, которая является обратной к функции $f(x)=2^x-4$, при значении аргумента, равном 4.

ОТВЕТЫ

1) $y=\frac{1}{3}x$

2) $y=\frac{1}{2}x+2,5$

3) $y=-x+1$

4) $y=\sqrt[3]{x}$

5) $y=\frac{3}{5x}$

6) $y=\frac{x+3}{2x-1}$

7) $y=\frac{4x+3}{x}$

8) $y=\frac{1}{3}\arcsin\frac{x}{2}$

9) $y=\arccos 2x$

10) $y=2\,\mathrm{arctg}\,x$

11) $y=1+\frac{1}{x}$

12) $y=\log_3 9(x-1)$

13) $y=-\log_3(x+2)$

14) $y=\log_2\left(\frac{8}{x-5}\right)$

15) $y=5^{x+3}-1$

16) $y=x^{\frac{3}{2}}+1$

17) $y=0,5x^3+2,5$

18) обратной функции нет

19) $y=5^{3-x}+6$

20) $y=2-\sqrt{x-3}$

21) $y=-\sqrt{x-4}$

22) $y=\frac{1}{2}x-1;\quad x\in[4;8]$

23) $y=\begin{cases}\frac{x-1}{2}, & x\in(-\infty;5]\\ \sqrt{x-1}, & x\in(5;\infty)\end{cases}$

24) $y=-2+10^{x-1}$

25) $y=2^{\frac{1}{x}}$

26) $y=\frac{1+x}{1-x}$

27) $y=\frac{5x+3}{x-1},\quad x\neq-\frac{3}{5}$

28) 6

29) 3

§ 2. ДИФФЕРЕНЦИРОВАНИЕ ФУНКЦИИ

Найдите производную функции, используя таблицу производных элементарных функций и правила дифференцирования.

Б ЮК 1. Найдите производные рациональных функций:

А

1) $f(x)=3x^3-2x^2+x-1$

2) $f(x)=15(x+4)(x^2-2)$

3) $f(x)=\frac{1}{2}x^2-x\sqrt{3}+2^{\sqrt{2}}$

4) $f(x)=x(2x+\sqrt{3})(2x-\sqrt{3})+3$

5) $f(x)=(x-1)(x^2+x+1)$

6) $f(x)=(x^2-1)(x^2+1)$

7) $f(x)=\frac{x-4}{1-3x}$

8) $f(x)=\frac{-2x+1}{4x+2}$

В

9) $f(x)=(x+1)(x+2)-(x-1)(x-3)$

10) $f(x)=(x^2+1)^2-2(x^2+1)+1$

11) $f(x)=x^4-\frac{1}{x}$

12) $f(x)=\frac{2x}{5}+\frac{5}{2x}$

13) $f(x)=\frac{3}{x}+\frac{x}{3}$; $f'(2)-?$

14) $f(x)=\frac{4}{x^2}+0,02x$; $f'(-2)-?$

15) $f(x)=\frac{3}{x}-\frac{2}{x^2}+\frac{1}{x^3}$

16) $f(x)=\frac{x^2+1}{x+1}$; $f'(1)-?$

17) $f(x)=\frac{1+x+x^2}{1-x}$; $f'(0)-?$

18) $f(x)=\frac{x^2+x-3}{2x}$

19) $f(x)=\frac{2x^3-x-3}{x}$

20) $f(x)=\frac{3-4x}{x^2}$

21) $f(x)=\frac{1}{x^3-5}$

22) $f(x)=\frac{1}{|x|}$; $f'(-2)-?$

23) $f(x)=\frac{(x+4)^2}{x+3}$

24) $f(x)=\frac{1}{x}+\frac{2}{x^2}+\frac{3}{x^3}$

25) $f(x)=\frac{x^2-2}{x^2+2}$; $f'(2)-?$

Найдите производные сложных функций:

26) $f(x)=(-2x+3)^8$

27) $f(x)=(x^2+1)^2$; $f'\left(\frac{1}{2}\right)-?$

28) $f(x)=(x^2-3x)^3$

29) $f(x)=(9x+5)^4$

30) $f(x)=(x^3-1)^6$

31) $f(x)=(x^4-x^3)^{42}$

32) $f(x)=\left(\frac{x}{3}+2\right)^{12}$

33) $f(x)=\left(\frac{1}{x}+1\right)^3$

34) $f(x)=\left(\frac{x+1}{x-1}\right)^2$

35) $f(x)=\frac{1}{(x^2-1)^4}$

36) $f(x)=\frac{2}{(x^2-x+1)^2}$

ОТВЕТЫ

1) $9x^2-4x+1$

2) $15(3x^2+8x-2)$

3) $x-\sqrt{3}$

4) $12x^2-3$

5) $3x^2$

6) $4x^3$

7) $\frac{-11}{(1-3x)^2}$

8) $\frac{-2}{(2x+1)^2}$

9) 7

10) $4x^3$

11) $4x^3+\frac{1}{x^2}$

12) $\frac{2}{5}-\frac{5}{2x^2}$

13) $-\frac{5}{12}$ 14) 1,02 15) $-\frac{3}{x^2}+\frac{4}{x^3}-\frac{3}{x^4}$

16) 0,5 17) 2 18) $\frac{x^2+3}{2x^2}$

19) $4x+\frac{3}{x^2}$ 20) $\frac{4x-6}{x^3}$ 21) $\frac{-3x^2}{\left(x^3-5\right)^2}$

22) $\frac{1}{4}$ 23) $\frac{x^2+6x+8}{(x+3)^2}$ 24) $-\frac{1}{x^2}-\frac{4}{x^3}-\frac{9}{x^4}$

25) $\frac{4}{9}$ 26) $-16(-2x+3)^7$ 27) 2,5

28) $3(2x-3)\left(x^2-3x\right)^2$ 29) $36(9x+5)^3$

30) $18x^2\left(x^3-1\right)^5$ 31) $42\left(4x^3-3x^2\right)\left(x^4-x^3\right)^{41}$

32) $4\left(\frac{x}{3}+2\right)^{11}$ 33) $-\frac{3}{x^2}\left(1+\frac{1}{x}\right)^2$ 34) $-\frac{4(x+1)}{(x-1)^3}$

35) $\frac{-8x}{\left(x^2-1\right)^5}$ 36) $\frac{4(1-2x)}{\left(x^2-x+1\right)^3}$

БЛОК 2. Найдите производные иррациональных функций:

А

1) $f(x)=x^2+2\sqrt{x}$ 2) $f(x)=\sqrt{x}+\sqrt[3]{x}+\sqrt[4]{x}$

3) $f(x)=\sqrt{x}+4x\sqrt{x}+2$ 4) $f(x)=\frac{\sqrt{x}}{2}+\frac{2}{\sqrt{x}}$

5) $f(x)=\frac{x^4}{\sqrt{x}}$ 6) $f(x)=\frac{1-x}{1-\sqrt{x}}$

7) $f(x)=\sqrt{x}\left(x^3-\sqrt{x}+1\right)$

8) $f(x)=4\cdot\sqrt[4]{x}-6\cdot\sqrt[3]{x^2}$

9) $f(x)=\dfrac{2}{x^5}+x\cdot\sqrt[4]{x}$

B

10) $f(x)=\dfrac{5\sqrt{x}+x+1}{\sqrt{x}}$

11) $f(x)=\dfrac{2\sqrt{x}}{1-x^2}$

12) $f(x)=\dfrac{x^2+2x}{\sqrt{x}}$

13) $f(x)=x^{-2}\cdot\sqrt{x}\cdot\sqrt[3]{x}$

14) $f(x)=\dfrac{1}{2}\sqrt[4]{2x\sqrt{x}}$

15) $f(x)=\dfrac{1}{4}\sqrt[4]{8x^3\cdot\sqrt{x}}$

16) $f(x)=\dfrac{1}{x}+\dfrac{1}{\sqrt{x}}+\dfrac{1}{\sqrt[3]{x}}$

Найдите производные сложных функций:

17) $f(x)=\sqrt{x^2-3}$

18) $f(x)=\sqrt{4-x^2}$

19) $f(x)=\sqrt{x^2-4x+6}$

20) $f(x)=x\sqrt{1+x^2}$

21) $f(x)=\sqrt[3]{\left(x^3+1\right)^2}$

22) $f(x)=\left(x+\sqrt{x}\right)^3$

23) $f(x)=\sqrt[3]{\left(x^3-2\right)^2}$; $f'(2)-?$

24) $f(x)=\left(1+\sqrt{x^2+1}\right)^2$

25) $f(x)=\left(\sqrt{2x+5}+1\right)^3$

26) $f(x)=\left(x^2+6\right)\sqrt{x^2-3}$

27) $f(x)=\sqrt[3]{\dfrac{1}{1+x^2}}$

28) $f(x)=\dfrac{2x-1}{\sqrt{x^2+1}}$

29) $f(x)=3\cdot\sqrt[3]{9x^2-9}+\frac{1}{15}(2x-4)^3$; $f'(2)-?$

ОТВЕТЫ

1) $2x+\frac{1}{\sqrt{x}}$

2) $\frac{1}{2\sqrt{x}}+\frac{1}{3\cdot\sqrt[3]{x^2}}+\frac{1}{4\cdot\sqrt[4]{x^3}}$

3) $\sqrt{x}\left(\frac{1}{2x}+6\right)$

4) $\frac{\sqrt{x}\,(x-4)}{4x^2}$

5) $\frac{7x^2\cdot\sqrt{x}}{2}$

6) $\frac{1}{2\sqrt{x}}$

7) $\frac{7}{2}x^2\sqrt{x}+\frac{1}{2\sqrt{x}}-1$

8) $\frac{1}{\sqrt[4]{x^3}}-\frac{4}{\sqrt[3]{x}}$

9) $-\frac{10}{x^6}+\frac{5}{4}\sqrt[4]{x}$

10) $\frac{x-1}{2x\sqrt{x}}$

11) $\frac{1+3x^2}{\sqrt{x}\left(1-x^2\right)^2}$

12) $\frac{3}{2}\sqrt{x}+\frac{1}{\sqrt{x}}$

13) $-\frac{7}{6}x^{-\frac{13}{6}}$

14) $\frac{3\cdot\sqrt[4]{2}}{16\cdot\sqrt[8]{x^5}}$

15) $\frac{7\cdot\sqrt[4]{8}}{32\cdot\sqrt[8]{x}}$

16) $-\frac{1}{x^2}-\frac{1}{2x\sqrt{x}}-\frac{1}{3x\cdot\sqrt[3]{x}}$

17) $\frac{x}{\sqrt{x^2-3}}$

18) $\frac{-x}{\sqrt{4-x^2}}$

19) $\frac{x-2}{\sqrt{x^2-4x+6}}$

20) $\frac{1+2x^2}{\sqrt{1+x^2}}$

21) $\frac{2x^2}{\sqrt[3]{x^3+1}}$

22) $3\left(x+\sqrt{x}\right)^2\left(1+\frac{1}{2\sqrt{x}}\right)$

23) $\frac{8}{\sqrt[3]{6}}$

24) $\frac{2x\left(1+\sqrt{x^2+1}\right)}{\sqrt{x^2+1}}$

25) $\frac{3\left(\sqrt{2x+5}+1\right)^2}{\sqrt{2x+5}}$

26) $\frac{3x^3}{\sqrt{x^2-3}}$

27) $\frac{-2x}{3\cdot\sqrt[3]{\left(1+x^2\right)^4}}$

28) $\frac{x+2}{\sqrt{\left(x^2+1\right)^3}}$

29) 4

БЛОК 3. **Найдите производные тригонометрических функций:**

А

1) $f(x)=5\sin x+3\cos x$; $f'\left(\frac{\pi}{4}\right)-?$

2) $f(x)=\sin^2 x+\cos^2 x$

3) $f(x)=\cos x(1+\sin x)$

4) $f(x)=\operatorname{ctg} x+\frac{12x^3}{\pi^2}$; $f'\left(\frac{\pi}{6}\right)-?$

5) $f(x)=\cos x-\frac{2x^2}{\pi}+1$; $f'\left(\frac{\pi}{2}\right)-?$

6) $f(x)=\left(x^3-2x+1\right)\cos x$; $f'(0)-?$

7) $f(x)=2\cos x-\frac{\left(\sqrt{\pi}\right)^3}{\sqrt{x}}+\frac{\pi}{2}$; $f'(\pi)-?$

8) $f(x)=\operatorname{tg} x-\operatorname{ctg} x$

В

9) $f(x)=x\cdot\operatorname{ctg} x$

10) $f(x)=\frac{\cos 2x}{\cos x-\sin x}$

11) $f(x)=\frac{x}{\sin x}$

12) $f(x)=\frac{\operatorname{ctg} x}{3x}$

13) $f(x)=\frac{\sin x}{x}$

14) $f(x)=\frac{x}{1-\cos x}$

15) $f(x)=\frac{\operatorname{tg} x}{x}$

16) $f(x)=\frac{\sin x}{1+\cos x}$

17) $f(x)=\frac{1-\cos x}{(1+\cos x)^2}$

18) $f(x)=\frac{\operatorname{tg} x+1}{\operatorname{tg} x}$

19) $f(x)=\frac{\sin x+\cos x}{\sin x-\cos x}$

20) $f(x)=\frac{\sin x}{x}+\frac{x}{\sin x}$

21) $f(x)=(2-x^2)\cos x+2x\sin x$

Найдите производные сложных функций:

22) $f(x)=\sin^2 x\cdot\cos^2 x$

23) $f(x)=3x^2-\sin^2 2x$

24) $f(x)=\cos\left(\frac{1}{x}\right)$

25) $f(x)=2\sin^3 x$; $f'\left(\frac{\pi}{6}\right)-?$

26) $f(x)=\cos 3\pi x-\sin 2\pi x$; $f'\left(\frac{1}{2}\right)-?$

27) $f(x)=\cos(x^2-4x)$

28) $f(x)=\cos^3(2x-1)$

29) $f(x)=\sqrt{\cos x}$; $f'\left(\frac{\pi}{3}\right)-?$

30) $f(x)=3\cos 2x-\sin 2x$; $f'\left(\frac{\pi}{8}\right)-?$

31) $f(x)=\cos(\sqrt{x})$; $f'\left(\frac{\pi^2}{16}\right)-?$

32) $f(x)=(\cos 3x+6)^3$

33) $f(x)=\sin x+2\cos^2 x$; $f'\left(-\frac{\pi}{3}\right)-?$

34) $f(x)=x\cos^2 x+\pi$; $f'\left(\frac{\pi}{4}\right)-?$

35) $f(x)=\frac{2\sin x\cdot\cos x}{\cos^2 x-\sin^2 x}$

36) $f(x)=\frac{2\operatorname{tg} x}{1-\operatorname{tg}^2 x}$

37) $f(x)=5\operatorname{tg}\frac{x}{5}+\operatorname{tg}\frac{\pi}{8}$

38) $f(x)=\operatorname{tg}^2 x+1$

39) $f(x)=\cos x\cdot\cos 3x+\sin x\cdot\sin 3x$

40) $f(x)=\sin x\cdot\sin 3x+\cos 2x$; $f'\left(\frac{\pi}{4}\right)-?$

41) $f(x)=\frac{\sin 4x}{4x}$

42) $f(x)=\frac{\sin 2x}{x^2}$

43) $f(x)=\cos x\cdot\sin^3 x$

44) $f(x)=\sqrt{2-\sin x}$

45) $f(x)=\sqrt{\operatorname{tg}\frac{x}{2}}$

46) $f(x)=\operatorname{tg}\left(\frac{x+1}{2}\right)$

47) $f(x)=\sin(\cos x)$

48) $f(x)=\sqrt{\sin\left(x^2-x\right)}$

49) $f(x)=\dfrac{1}{\sqrt{\sin x}}$

50) $f(x)=\dfrac{\sin^4 x-\cos^4 x}{\sin^2 x}$

51) $f(x)=\sin\dfrac{x}{2}\cdot\sin 2x$

ОТВЕТЫ

1) $\sqrt{2}$

2) 0

3) $\cos 2x-\sin x$

4) -3

5) -3

6) -2

7) $\dfrac{1}{2}$

8) $\dfrac{4}{\sin^2 2x}$

9) $\operatorname{ctg} x-\dfrac{x}{\sin^2 x}$

10) $\cos x-\sin x$

11) $\dfrac{\sin x-x\cos x}{\sin^2 x}$

12) $-\dfrac{2x+\sin 2x}{6x^2\sin^2 x}$

13) $\dfrac{x\cos x-\sin x}{x^2}$

14) $\dfrac{1-\cos x-x\sin x}{(1-\cos x)^2}$

15) $\dfrac{x-\sin x\cdot\cos x}{x^2\cos^2 x}$

16) $\dfrac{1}{1+\cos x}$

17) $\dfrac{\sin x(3-\cos x)}{(1+\cos x)^3}$

18) $-\dfrac{1}{\sin^2 x}$

19) $\dfrac{-2}{(\sin x-\cos x)^2}$

20) $(x\cos x-\sin x)\left(\dfrac{1}{x^2}-\dfrac{1}{\sin^2 x}\right)$

21) $x^2\sin x$

22) $\dfrac{1}{2}\sin 4x$

23) $6x-2\sin 4x$

24) $\dfrac{1}{x^2}\sin\left(\dfrac{1}{x}\right)$

25) $\dfrac{3\sqrt{3}}{4}$

26) 5π

27) $(4-2x)\sin\left(x^2-4x\right)$

28) $-6\cos^2(2x-1)\cdot\sin(2x-1)$

29) $-\dfrac{\sqrt{6}}{4}$

30) $-4\sqrt{2}$

31) $-\dfrac{\sqrt{2}}{\pi}$

32) $-9\sin 3x\left(\cos 3x+6\right)^2$

33) $\sqrt{3}+\frac{1}{2}$

34) $\frac{2-\pi}{4}$

35) $\frac{2}{\cos^2 2x}$

36) $\frac{2}{\cos^2 2x}$

37) $\frac{1}{\cos^2\frac{x}{5}}$

38) $\frac{2\sin x}{\cos^3 x}$

39) $-2\sin 2x$

40) -3

41) $\frac{4x\cos 4x-\sin 4x}{4x^2}$

42) $\frac{2\left(x\cos 2x-\sin 2x\right)}{x^3}$

43) $\sin^2 x\left(3\cos^2 x-\sin^2 x\right)$

44) $\frac{-\cos x}{2\sqrt{2-\sin x}}$

45) $\frac{1}{4\sqrt{\operatorname{tg}\frac{x}{2}}\cdot\cos^2\frac{x}{2}}$

46) $\frac{1}{2\cos^2\left(\frac{x+1}{2}\right)}$

47) $-\sin x\cdot\cos\left(\cos x\right)$

48) $\frac{\left(2x-1\right)\cos\left(x^2-x\right)}{2\sqrt{\sin\left(x^2-x\right)}}$

49) $\frac{-\operatorname{ctg} x}{2\sqrt{\sin x}}$

50) $\frac{2\operatorname{ctg} x}{\sin^2 x}$

51) $\frac{1}{2}\cos\frac{x}{2}\cdot\sin 2x+2\sin\frac{x}{2}\cdot\cos 2x$

<u>БЛОК 4</u>. Найдите производные показательных и логарифмических функций:

А

1) $f\left(x\right)=3^x+4^x$

2) $f\left(x\right)=e^x+4\sqrt{x}-\sqrt[4]{3}$; $f'(1)-?$

3) $f\left(x\right)=\log_2 x+2^x$

4) $f\left(x\right)=\frac{1}{3}6^x-6$; $f'(1)-?$

5) $f\left(x\right)=x^3-3^x$

6) $f\left(x\right)=\ln e^{\sin x}$

7) $f(x)=\frac{2\lg x}{\lg e}-\frac{1}{4}x-\log_2 5$; $f'(2)-?$

B

8) $f(x)=e^x\left(x^2-2x+2\right)$

9) $f(x)=x\cdot\lg x+10^x$; $f'(1)-?$

10) $f(x)=x^2\ln x$

11) $f(x)=x^4\cdot 4^x$

12) $f(x)=x^{\sqrt{2}}+\left(\sqrt{2}\right)^x$

13) $f(x)=3^x(x+1)$

14) $f(x)=\frac{2^x+2^{-x}}{2}$

15) $f(x)=x^2\log_3 x$

16) $f(x)=x\cdot 10^x$

17) $f(x)=\frac{x}{e^x}$

18) $f(x)=\frac{\cos x}{e^x}$

19) $f(x)=\frac{x^5}{e^x}$

20) $f(x)=\frac{e^x}{\sin x}$

21) $f(x)=\frac{1}{\ln x}$

22) $f(x)=\frac{3^x}{x^2}$; $f'(-1)-?$

23) $f(x)=\operatorname{tg}x+\frac{e^x}{1+x}$

Найдите производные сложных функций:

24) $f(x)=x+e^{-2x}$; $f'(0)-?$

25) $f(x)=10^{\frac{1}{x}}$

26) $f(x)=\frac{e^x-1}{e^x}$

27) $f(x)=\ln^2 x$

28) $f(x)=e^{\sin 2x}$

29) $f(x)=\sin\left(2^{x}\right)$

30) $f(x)=\cos(7,2x)-e^{-7,2x}-\sqrt[4]{7,2}$

31) $f(x)=x\cdot 2^{x+1}$; $f'(0)-?$

32) $f(x)=e^{\operatorname{tg}2x}$

33) $f(x)=\ln^{3}3x$

34) $f(x)=x\ln\left(x^{2}+1\right)+\ln 5$; $f'(-2)-?$

35) $f(x)=\ln(\sin 4x)+\dfrac{2x^{2}}{\pi}+\dfrac{1}{4}$; $f'\left(\dfrac{\pi}{16}\right)-?$

36) $f(x)=\ln\sqrt{2x-1}$

37) $f(x)=\ln\sqrt{1+\operatorname{tg}^{2}x}$

38) $f(x)=\ln\left(x+\sqrt{1+x^{2}}\right)$

39) $f(x)=\log_{3}\left(x^{2}-2\sqrt{x}\right)$

40) $f(x)=\ln(\operatorname{ctg}x)$; $f'\left(\dfrac{\pi}{8}\right)-?$

41) $f(x)=\ln\left(\dfrac{x+1}{x-1}\right)$

42) $f(x)=\ln(\sin x)$

43) $f(x)=\ln(x\sin x)$

44) $f(x)=\ln\left(x^{2}-3\sin x\right)$

45) $f(x)=\ln(1+\cos x)$

46) $f(x)=\ln\left(\ln x^{2}\right)$

47) $f(x)=\ln^4(\sin x)$

48) $f(x)=\sqrt[x]{5}+5^{-2x}$

ОТВЕТЫ

1) $3^x\ln 3+4^x\ln 4$

2) $e+2$

3) $\dfrac{1}{x\ln 2}+2^x\ln 2$

4) $2\ln 6$

5) $3x^2-3^x\ln 3$

6) $\cos x$

7) 0,75

8) x^2e^x

9) $\dfrac{1+10\ln^2 10}{\ln 10}$

10) $x\ln\left(ex^2\right)$

11) $4^x\cdot x^3(4+x\ln 4)$

12) $\sqrt{2}\,x^{\sqrt{2}-1}+\left(\sqrt{2}\right)^{x-2}\ln 2$

13) $3^x\left((x+1)\ln 3+1\right)$

14) $\left(2^x-2^{-x}\right)\ln\sqrt{2}$

15) $2x\log_3 x+\dfrac{x}{\ln 3}$

16) $10^x(1+x\ln 10)$

17) $\dfrac{1-x}{e^x}$

18) $-\dfrac{\sin x+\cos x}{e^x}$

19) $\dfrac{5x^4-x^5}{e^x}$

20) $\dfrac{e^x}{\sin^2 x}(\sin x-\cos x)$

21) $\dfrac{-1}{x\ln^2 x}$

22) $\dfrac{2+\ln 3}{3}$

23) $\dfrac{1}{\cos^2 x}+\dfrac{xe^x}{(1+x)^2}$

24) -1

25) $-\dfrac{1}{x^2}\cdot 10^{\frac{1}{x}}\ln 10$

26) e^{-x}

27) $\dfrac{2\ln x}{x}$

28) $2\cos 2x\cdot e^{\sin 2x}$

29) $2^x\ln 2\cos\left(2^x\right)$

30) $7{,}2\left(e^{-7{,}2x}-\sin(7{,}2x)\right)$

31) 2

32) $\dfrac{2e^{\operatorname{tg} 2x}}{\cos^2 2x}$

33) $\dfrac{3\ln^2 3x}{x}$

34) $\ln 5+1{,}6$

35) 4,25

36) $\dfrac{1}{2x-1}$

37) $\operatorname{tg} x$

38) $\dfrac{1}{\sqrt{1+x^2}}$

39) $\dfrac{2x\sqrt{x}-1}{\ln 3\left(x^2\sqrt{x}-2x\right)}$

40) $-2\sqrt{2}$

41) $\dfrac{2}{1-x^2}$

42) $\operatorname{ctg} x$

43) $\dfrac{1}{x}+\operatorname{ctg} x$

44) $\dfrac{2x-3\cos x}{x^2-3\sin x}$

45) $\dfrac{-\sin x}{1+\cos x}$

46) $\dfrac{1}{x\ln|x|}$

47) $4\ln^3(\sin x)\cdot\operatorname{ctg} x$

48) $-\ln 5\left(2\cdot 5^{-2x}+5^{\frac{1}{x}}x^{-2}\right)$

БЛОК 5.

В

1) Составьте и решите уравнение $f'(x)=0$, если $f(x)=(x-1)(x^2+1)(x+1)$.

2) Составьте и решите уравнение $f'(x)\cdot g'(x)=0$, если $f(x)=x^3-6x^2$, $g(x)=\frac{1}{3}\sqrt{x}$

3) Составьте и решите уравнение $\dfrac{f'(x)}{g'(x)}=0$, если $f(x)=\frac{2}{3}x^3-18x$. $g(x)=2\sqrt{x}$.

4) Составьте и решите уравнение $f'(x)-f(x)=0$, если $f(x)=x^3$.

5) Составьте и решите уравнение $f'(x)-g'(x)=0$, если $f(x)=x^2-3$, $g(x)=(x-2)(3x+2)$.

6) Составьте и решите уравнение $f'(x)=g'(x)$, если $f(x)=x^2+4$, $g(x)=(x+1)(4x-3)$.

7) Составьте и решите уравнение $\dfrac{3f'(x)}{f'(x)+1}=2$, если $f(x)=3x-2\sqrt{x}$.

8) Составьте и решите уравнение $f'(x)=0$, если $f(x)=\cos x-2\sin^2 x+1$.

9) Составьте и решите уравнение $f'(x)=0$, если $f(x)=5^{2x}-2x\ln 5$.

ОТВЕТЫ

1) 0 2) 4 3) 3 4) 0; 3 5) 1 6) $-\dfrac{1}{6}$ 7) 1

8) πk; $\pm\arccos\left(-\dfrac{1}{4}\right)+2\pi n$; $n,k\in\mathbb{Z}$ 9) 0

БЛОК 6.

В

1) Укажите число целых решений неравенства $f'(x)\le 0$, если $f(x)=\dfrac{x^5}{5}-\dfrac{16x^3}{3}$.

2) Составьте и решите неравенство $f'(x)\le 0$, если $f(x)=6x^2-3\ln x$.

3) Составьте и решите неравенство $f'(x)\le g'(x)$, если $f(x)=\dfrac{2}{x}$, $g(x)=x-x^3$.

4) Составьте и решите неравенство $\dfrac{f(x)}{f'(x)}\ge 0$, если $f(x)=x^4-4x^2$.

5) Составьте и решите неравенство $f'(x) > 0$, если $f(x) = 6x + 2,5x^2 - \frac{x^3}{3}$.

6) Составьте и решите неравенство $f'(x) < g'(x)$, если $f(x) = 5x + 3$, $g(x) = 2x\left(x + \frac{1}{2}\right)$.

7) Составьте и решите неравенство $g'(x) < f'(x)$, если $g(x) = 4x - 5$, $f(x) = \frac{1}{2}x(2 - 6x)$.

8) Найдите, для каких x производная функции $f(x) = x^2 - 5x$ удовлетворяет неравенству $f'(x) \leq 1$

9) Составьте и решите неравенство $f'(x) - f(x) \geq 0$, если $f(x) = \frac{3}{5 - x}$.

10) Составьте и решите неравенство $f'(x) < g'(x)$, если $f(x) = \frac{x^2 + 1}{x}$ и $g(x) = 5x + \frac{1}{x}$.

11) Составьте и решите неравенство $f'(x) > 0$, если $f(x) = \sin x + \frac{x}{2}$.

12) Найдите наименьшее целое решение неравенства $\frac{f'(x)}{x - 5} \geq 0$, где $f(x) = x^3 - 3x - 4$.

13) Решите неравенство $f'(x) > 0$, если $f(x) = \frac{x^3 + 16}{x}$.

14) Решите неравенство $f'(x) \geq 0$, если $f(x) = x^2(3x^2 - 4x - 12) + 3$.

ОТВЕТЫ

1) 9

2) $\left(0;\frac{1}{2}\right]$

3) $[-1;0)\cup(0;1]$

4) $\left[-2;-\sqrt{2}\right)\cup\left(0;\sqrt{2}\right)\cup[2;\infty)$

5) $(-1;6)$

6) $(1;\infty)$

7) $\left(-\infty;-\frac{1}{2}\right)$

8) $(-\infty;3]$

9) $[4;5)\cup(5;\infty)$

10) $(-\infty;0)\cup(0;\infty)$

11) $\left(-\frac{2\pi}{3}+2\pi k;\ \frac{2\pi}{3}+2\pi k\right)$

12) -1

13) $(2;\infty)$

14) $[-1;0]\cup[2;\infty)$

Б ЛОК 7. Найдите производные следующих функций:

С

1) $f(x)=\sin\left(\frac{1}{x}\right)+\frac{1}{\sin x}$

2) $f(x)=\sqrt{1-8\sin\frac{x}{8}}$

3) $f(x)=\operatorname{tg}^7 2x$

4) $f(x)=\arccos\left(\frac{1-x}{1+x}\right)$

5) $f(x)=\frac{2\sin^2 x}{\cos 2x}$

6) $f(x)=x^2\cos\left(\frac{1}{x}\right)$

7) $f(x)=\operatorname{arctg}\left(\frac{x+1}{x-1}\right)$

8) $f(x)=\sqrt[3]{\sin^2 x}+\frac{1}{\cos^3 x}$

9) $f(x)=\arcsin x+\sqrt{1-x^2}$

10) $f(x)=\sqrt{x}\cdot\operatorname{arctg} x$

11) $f(x)=\sqrt{1+2\operatorname{tg} x}$

12) $f(x)=\arccos\frac{1-x}{\sqrt{2}}$

13) $f(x)=\sqrt{x}-\operatorname{arctg}\sqrt{x}$

14) $f(x)=\operatorname{arctg}x+\frac{1}{3}\operatorname{arctg}\left(x^3\right)$

15) $f(x)=\operatorname{arctg}^2\left(\frac{1}{x}\right)$

16) $f(x)=\arcsin\left(\frac{2}{x}\right)$

17) $f(x)=\operatorname{tg}(\sin x)$

18) $f(x)=\sin^2\left(x^2\right)$

19) $f(x)=\frac{1}{3\cos^3 x}-\frac{1}{\cos x}$

20) $f(x)=\sqrt{xe^x+x}$

21) $f(x)=\frac{1+\cos 2x}{1-\cos 2x}$

22) $f(x)=\frac{1}{3}\operatorname{tg}^3 x-\operatorname{tg}x+x$

ОТВЕТЫ

1) $-\frac{1}{x^2}\cos\left(\frac{1}{x}\right)-\frac{\cos x}{\sin^2 x}$

2) $-\frac{\cos\frac{x}{8}}{2\sqrt{1-8\sin\frac{x}{8}}}$

3) $\frac{14\operatorname{tg}^6 2x}{\cos^2 2x}$

4) $\frac{1}{\sqrt{x}\,(1+x)}$

5) $\frac{2\sin 2x}{\cos^2 2x}$

6) $2x\cos\left(\frac{1}{x}\right)+\sin\left(\frac{1}{x}\right)$

7) $-\frac{1}{x^2+1}$

8) $\frac{2\cos x}{3\cdot\sqrt[3]{\sin x}}+\frac{3\sin x}{\cos^4 x}$

9) $\sqrt{\frac{1-x}{1+x}}$

10) $\frac{\operatorname{arctg}x}{2\sqrt{x}}+\frac{\sqrt{x}}{1+x^2}$

11) $\frac{1}{\cos^2 x\cdot\sqrt{1+2\operatorname{tg}x}}$

12) $\frac{1}{\sqrt{1+2x-x^2}}$

13) $\frac{\sqrt{x}}{2(1+x)}$

14) $\frac{1+x^4}{1+x^6}$

15) $-\frac{2\operatorname{arctg}\left(\frac{1}{x}\right)}{x^2+1}$

16) $\frac{-2}{|x|\sqrt{x^2-4}}$

17) $\frac{\cos x}{\cos^2(\sin x)}$

18) $2x\cdot\sin\left(2x^2\right)$

19) $\frac{\sin^3 x}{\cos^4 x}$ 20) $\frac{e^x + x e^x + 1}{2\sqrt{x e^x + x}}$ 21) $-2\frac{\cos x}{\sin^3 x}$

22) $\mathrm{tg}^4 x$

§ 3. ИССЛЕДОВАНИЕ ФУНКЦИИ С ПРИМЕНЕНИЕМ ПРОИЗВОДНОЙ

БЛОК 1. **Найдите критические точки функции:**

А

1) $f(x)=2+18x^2-x^4$

2) $f(x)=-2x^3-3x^2+4$

3) $f(x)=\frac{1}{4}x^4-2x^2+3$

4) $f(x)=x^3-6x^2+9x-4$

5) $f(x)=2x^3+3x^2-36x+15$

6) $f(x)=2x^3-\frac{5}{2}x^2+x-\sqrt{3}$

7) $f(x)=(x+1)^3(2x-3)$

8) $f(x)=(x+2)^3(x-1)^2$

9) $f(x)=\frac{x^2-3x}{x-4}$

10) $f(x)=2x+\frac{8}{x}$

11) $f(x)=\frac{x}{4x^2-3x+4}$

В

12) $f(x)=2\sqrt{x}-x$

13) $f(x)=\sqrt[3]{1-x^2}$

14) $f(x)=x\sqrt{2-x^2}$

15) $f(x)=3\sqrt{x^2}-x^2$

16) $f(x)=x-4\sqrt{x}+\sqrt{3}$

17) $f(x)=\sqrt{x^2-6x}$

18) $f(x)=\sqrt{x^2-6x+15}$

19) $f(x)=(x-1)\sqrt{x}$

20) $f(x)=\sqrt[3]{x^2}(x-5)$

21) $f(x)=e^x(-x^2+4x-1)$

22) $f(x)=2^x-x\ln 2+1$

23) $f(x)=\ln(4x-x^2)$

24) $f(x)=\ln^2 x-6\ln x+5$

25) $f(x)=\frac{x^2}{2}-6\ln(x-1)$

26) $f(x)=2^x+4^{-x}$

27) $f(x)=0,5\sin 2x+\sin x$

28) $f(x)=0,5\cos 2x+\cos x$

29) $f(x)=\sin x-\frac{x}{2}$

30) $f(x)=x^{\frac{2}{3}}(x-3)$

ОТВЕТЫ

1) $\pm 3;\ 0$

2) $-1;\ 0$

3) $\pm 2;\ 0$

4) $1;\ 3$

5) $-3;\ 2$

6) $\frac{1}{3};\ \frac{1}{2}$

7) $-1;\ \frac{7}{8}$

8) $-2;\ -\frac{1}{5};\ 1$

9) $2;\ 6$

10) ± 2

11) ± 1

12) 1

13) $\pm 1;\ 0$

14) ± 1

15) $\pm 1,5;\ 0$

16) 4

17) нет критических точек

18) 3

19) $\frac{1}{3}$

20) $0;\ 2$

21) $-1;\ 3$

22) 0

23) 2

24) e^3

25) 3

26) $\frac{1}{3}$

27) $\pi+2\pi k;\quad \pm\frac{\pi}{3}+2\pi n$

28) $\pi k;\ \pm\frac{2\pi}{3}+2\pi n$

29) $\pm\frac{\pi}{3}+2\pi k$

30) $0;\ \frac{6}{5}$

***В ответах параметры** $k, n\in\mathbb{Z}$

БЛОК 2. **Найдите интервалы монотонности функции:**

Найдите интервалы возрастания функции:

А

1) $f(x)=x^3-3x^2+2x-7$

2) $f(x)=\frac{1}{5}x^5-\frac{1}{2}x^4$

3) $f(x)=x^3+3x^2-9x$

4) $f(x)=-2x^3+3x^2+36x+1$

5) $f(x)=x^5+2x^3+x$

6) $f(x)=-x^3+x^2+x+1$

7) $f(x)=\frac{(x-2)^2}{x+1}$

8) $f(x)=x+\frac{16}{x}$

9) $f(x)=-\frac{1}{x}$

10) $f(x)=\frac{6x+8}{x^2+1}$

В

11) $f(x)=\sqrt{x-x^2}$

12) $f(x)=\sqrt{x-4}$

13) $f(x)=\sqrt{x}-x$

14) $f(x)=x^2\sqrt{2-x}$

15) $f(x)=e^x+5x$

16) $f(x)=\frac{x}{e^x}$

17) $f(x)=\ln(x^2+2x+3)$

18) $f(x)=\frac{x^2}{10}-\ln x$

19) $f(x)=\sin x-\frac{\sqrt{2}}{2}x$

20) $f(x)=\cos 2x-\sqrt{3}\,x$

Найдите интервалы убывания функции:

А

21) $f(x)=1-x^3$

22) $f(x)=2x^3-3x^2+1$

23) $f(x) = 2x^4 - 4x^2 + 1$

24) $f(x) = x^3 - x^2 - x + 3$

25) $f(x) = 4x^3 - 9x^2 + 6x$

26) $f(x) = \frac{3}{x} - \frac{x}{3}$

27) $f(x) = -\frac{3}{x^2}$

28) $f(x) = x^3 + \frac{3}{x}$

29) $f(x) = \frac{x^2 + 1}{x}$

30) $f(x) = \frac{1}{x - 2}$

31) $f(x) = \frac{1}{2x}$

32) $f(x) = \frac{2}{1 - x^2}$

B

33) $f(x) = \sqrt{2x - x^2}$

34) $f(x) = \sqrt{2x^2 - x + 1}$

35) $f(x) = x - \sqrt{x}$

36) $f(x) = 2x \ln x$

37) $f(x) = x e^{-3x}$

38) $f(x) = (x - 1) e^{x+1}$

39) $f(x) = \ln\left(\frac{1}{x}\right)$

40) $f(x) = \sin x - x$

ОТВЕТЫ

1) $\left(-\infty; \frac{3-\sqrt{3}}{3}\right]$, $\left[\frac{3+\sqrt{3}}{3}; \infty\right)$

2) $(-\infty; 0]$, $[2; \infty)$

3) $(-\infty; -3]$, $[1; \infty)$

4) $[-2; 3]$

5) $(-\infty; \infty)$

6) $\left[-\frac{1}{3}; 1\right]$

7) $(-\infty; -4]$, $[2; \infty)$

8) $(-\infty; -4]$, $[4; \infty)$

9) $(-\infty; 0)$, $(0; \infty)$

10) $\left[-3; \frac{1}{3}\right]$

11) $\left[0; \frac{1}{2}\right]$

12) $[4;\infty)$ 13) $\left[0;\frac{1}{4}\right]$ 14) $\left[0;\frac{8}{5}\right]$

15) $(-\infty;\infty)$ 16) $(-\infty;1]$ 17) $[-1;\infty)$

18) $\left[\sqrt{5};\infty\right)$ 19) $\left[-\frac{\pi}{4}+2\pi k;\ \frac{\pi}{4}+2\pi k\right]$ 20) $\left[-\frac{\pi}{3}+\pi k;-\frac{\pi}{6}+\pi k\right]$

21) $(-\infty;\infty)$ 22) $[0;1]$ 23) $(-\infty;-1]$, $[0;1]$

24) $\left[-\frac{1}{3};1\right]$ 25) $\left[\frac{1}{2};1\right]$ 26) $(-\infty;0)$, $(0;\infty)$

27) $(-\infty;0)$ 28) $[-1;0)$, $(0;1]$ 29) $[-1;0)$, $(0;1]$

30) $(-\infty;2)$, $(2;\infty)$ 31) $(-\infty;0)$, $(0;\infty)$ 32) $(-\infty;-1)$, $(-1;0]$

33) $[1;2]$ 34) $\left(-\infty;\frac{1}{4}\right]$ 35) $\left[0;\frac{1}{4}\right]$

36) $\left(0;\frac{1}{e}\right]$ 37) $\left[\frac{1}{3};\infty\right)$ 38) $(-\infty;0]$

39) $(0;\infty)$ 40) $(-\infty;\infty)$

***В ответах параметр** $k\in\mathbb{Z}$

БЛОК 3.

Найдите точки экстремума функции:

А

1) $f(x)=x^3+3x^2-45x+1$ 2) $f(x)=x^5-15x^3$

3) $f(x)=x^2+x-2$ 4) $f(x)=x^3-3x$

5) $f(x)=x^3-2x^2+3x-2$ 6) $f(x)=x^2(x-3)$

B

7) $f(x)=\frac{x}{5}+\frac{5}{x}$

8) $f(x)=\frac{3x}{x^2+4x+4}$

9) $f(x)=x\sqrt{2-x^2}$

10) $f(x)=x^2\sqrt{1-x^2}$

11) $f(x)=(x-2)^2(x+1)^3$

12) $f(x)=e^{x^2-3x}$

13) $f(x)=x^2 \ln x$

14) $f(x)=x^3 \ln x$

15) $f(x)=3^{x^3-3x}$

16) $f(x)=3\cos\left(x-\frac{2\pi}{7}\right)$

17) $f(x)=\frac{e^x}{x}$

18) $f(x)=\sin 2x-x$, $x\in[0;\pi]$

19) $f(x)=\sin x-\frac{\sqrt{2}}{2}x$

20) $f(x)=\sqrt{x}-2x^2$

Найдите экстремумы функции:

A

21) $f(x)=4x-x^2$

22) $f(x)=x^2-6x+5$

23) $f(x)=4x^3+12x^2-3$

24) $f(x)=x^3-6x^2$

25) $f(x)=x^3-3x^2-9x+4$

26) $f(x)=2x^4-4x^2-5$

B

27) $f(x)=4x^2(x-2)^2$

28) $f(x)=2\ln x-x^2$

29) $f(x)=x^3 e^{-3x}$

30) $f(x)=x-e^x$

31) $f(x)=x+\frac{4}{x}$

32) $f(x)=\frac{1}{(x-3)^2}$

33) $f(x)=3x^3-2x^2+3x-2$

34) $f(x)=x\ln x$

35) $f(x)=x\,e^{-3x}$

36) $f(x)=-x^2+2\ln x$

37) $f(x)=x+\dfrac{1}{x}$

38) $f(x)=e^x+e^{-x}$

39) $f(x)=-\dfrac{1}{(x-1)^2}$

40) $f(x)=\dfrac{4}{\sqrt{x^2+8}}$

ОТВЕТЫ

1) $x_{\max}=-5$; $x_{\min}=3$

2) $x_{\max}=-3$; $x_{\min}=3$

3) $x_{\min}=-\dfrac{1}{2}$

4) $x_{\max}=-1$; $x_{\min}=1$

5) нет точек экстремума

6) $x_{\max}=0$; $x_{\min}=2$

7) $x_{\max}=-5$; $x_{\min}=5$

8) $x_{\max}=2$

9) $x_{\max}=1$; $x_{\min}=-1$

10) $x_{\max}=\pm\sqrt{\dfrac{2}{3}}$; $x_{\min}=0$

11) $x_{\max}=\dfrac{4}{5}$; $x_{\min}=2$

12) $x_{\min}=1{,}5$

13) $x_{\min}=\dfrac{1}{\sqrt{e}}$

14) $x_{\min}=\dfrac{1}{\sqrt[3]{e}}$

15) $x_{\max}=-1$; $x_{\min}=1$

16) $x_{\max}=\dfrac{2\pi}{7}+2\pi k$; $x_{\min}=\dfrac{9\pi}{7}+2\pi k$

17) $x_{\min}=1$

18) $x_{\max}=\dfrac{\pi}{6}$; $x_{\min}=\dfrac{5\pi}{6}$

19) $x_{max} = \frac{\pi}{4} + 2\pi k$; $x_{min} = -\frac{\pi}{4} + 2\pi k$

20) $x_{max} = \frac{1}{4}$

21) $y_{max} = 4$

22) $y_{min} = -4$

23) $y_{max} = 13$; $y_{min} = -3$

24) $y_{max} = 0$; $y_{min} = -32$

25) $y_{max} = 9$; $y_{min} = -23$

26) $y_{max} = -5$; $y_{min} = -7$

27) $y_{max} = 4$; $y_{min} = 0$

28) $y_{max} = -1$

29) $y_{max} = \frac{1}{e^3}$

30) $y_{max} = -1$

31) $y_{max} = -4$; $y_{min} = 4$

32) нет экстремумов

33) нет экстремумов

34) $y_{min} = -\frac{1}{e}$

35) $y_{max} = \frac{1}{3e}$

36) $y_{max} = -1$

37) $y_{max} = -2$; $y_{min} = 2$

38) $y_{min} = 2$

39) нет экстремумов

40) $y_{max} = \sqrt{2}$

В ответах параметр $k \in \mathbb{Z}$

<u>БЛОК 4</u>. Найдите наименьшее и наибольшее значения функции на заданном промежутке:

А

1) $f(x) = x^4 - 8x^2 + 1$, $x \in [-1; 3]$

2) $f(x) = x^4 - 8x^2 + 3$, $x \in [-2; 2]$

3) $f(x) = 3x^3 - 4x + 8$, $x \in [-1; 1]$

4) $f(x)=3x^5-5x^3+1$, $x\in[-2;2]$

5) $f(x)=x^3-2x^2+8x-2$, $x\in[1;4]$

6) $f(x)=2x^4-8x$, $x\in[-2;1]$

7) $f(x)=x+\frac{1}{x}$, $x\in\left[-2;-\frac{1}{2}\right]$

8) $f(x)=\frac{x}{8}+\frac{2}{x}$, $x\in[1;6]$

9) $f(x)=\frac{x}{2}+\frac{2}{x}$, $x\in[-3;-1]$

10) $f(x)=\frac{4}{3}x^3-4x$, $x\in[0;2]$

B

11) $f(x)=x+\frac{8}{x^4}$, $x\in[1;3]$

12) $f(x)=x^4(x+2)^3$, $x\in[-1;1]$

13) $f(x)=x^2+\frac{4}{1+x^2}$, $x\in[-2;3]$

14) $f(x)=\frac{4}{x^2}-x$, $x\in[-3;-1]$

15) $f(x)=\frac{3^x+3^{2-x}}{\ln 3}$, $x\in[-1;2]$

16) $f(x)=\log_{\frac{1}{2}} x$, $x\in\left[\frac{1}{2};4\right]$

17) $f(x)=\sqrt{4x}$, $x\in[1;4]$

18) $f(x)=\dfrac{4x}{e^x}$, $x\in[0;1]$

19) $f(x)=\dfrac{2\ln x}{x}$, $x\in[1;3]$, если $\ln 3\approx 1{,}099$

20) $f(x)=(x-1)\sqrt{x+2}$, $x\in[-2;0]$

21) $f(x)=2\cos x-\cos 2x$, $x\in\left[\dfrac{\pi}{6};\dfrac{\pi}{2}\right]$

22) $f(x)=\sin^2 x-x$, $x\in\left[0;\dfrac{\pi}{2}\right]$

23) $f(x)=\operatorname{tg} x-x$, $x\in\left[-\dfrac{\pi}{4};\dfrac{\pi}{4}\right]$

24) $f(x)=\sqrt{3}\,x+\sin 2x$, $x\in[0;\pi]$

25) $f(x)=x+\cos^2 x$, $x\in\left[0;\dfrac{\pi}{2}\right]$

26) $f(x)=e^{-x}\left(x^2+x-5\right)$, $x\in[-4;4]$

ОТВЕТЫ

1) -15; 10 2) -13; 3 3) $\dfrac{56}{9}$; $\dfrac{88}{9}$ 4) -55; 57

5) 5; 62 6) -6; 48 7) $-2{,}5$; -2 8) 1; $2\dfrac{1}{8}$

9) $-2{,}5$; -2 10) $-\dfrac{8}{3}$; $\dfrac{8}{3}$ 11) $2{,}5$; 9 12) 0; 27

13) 3; $9{,}4$ 14) 3; 5 15) $\dfrac{6}{\ln 3}$; $\dfrac{27\frac{1}{3}}{\ln 3}$ 16) -2; 1

17) 2; 4 **18)** 0; $\frac{4}{e}$ **19)** 0; $\frac{2}{e}$ **20)** -2; 0

21) 1; $\frac{3}{2}$ **22)** $1-\frac{\pi}{2}$; 0 **23)** $\frac{\pi}{4}-1$; $1-\frac{\pi}{4}$ **24)** 0; $\pi\sqrt{3}$

25) 1; $\frac{\pi}{2}$ **26)** $-3e^2$; $7e^4$

БЛОК 5. Решите задачи на нахождение оптимальных значений:

С

1) Найдите число, которое в сумме со своим квадратом давало бы наименьшую величину.

Ответ: $-\frac{1}{2}$.

2) Найдите такое положительное число a, которое сложенное с обратным ему числом дает экстремальную сумму. Что это будет: максимум или минимум?

Ответ: $a=1$, минимум.

3) Найдите число, утроенный квадрат которого превышает его куб на максимальное значение.

Ответ: 2.

4) Найдите число, куб которого превышает утроенный его квадрат на минимальное значение.

Ответ: 2.

5) Найдите число, которое превышало бы свой утроенный кубический корень на минимальное значение.

Ответ: 1.

6) Представьте число 12 в виде суммы двух неотрицательных слагаемых так, чтобы произведение куба одного из них на удвоенное второе было наибольшим.

Ответ: 9; 3.

7) Число 36 представьте в виде суммы двух положительных слагаемых, произведение которых максимально. Найдите произведение этих чисел.

Ответ: 324.

8) Число 64 разбейте на два слагаемых так, чтобы сумма первого слагаемого с квадратом второго была бы наименьшей.

Ответ: 0,5; 63,5.

9) Разбейте число 18 на два неотрицательных слагаемых так, чтобы произведение квадрата первого слагаемого и второго слагаемого было бы наибольшим.

Ответ: 12; 6.

10) Число 49 представьте в виде произведения двух положительных сомножителей, сумма которых минимальна. Найдите сумму.

Ответ: 14.

11) Число 20 представьте в виде суммы двух положительных слагаемых, сумма квадратов которых минимальна. Найдите сумму квадратов этих чисел.

Ответ: 200.

12) Площадь участка, имеющего форму равнобедренной трапеции с острым углом $30°$, равна 200. Какое наименьшее значение принимает его периметр?

Ответ: 80.

13) Площадь участка в виде параллелограмма с острым углом $30°$, равна 8. Какое наименьшее значение принимает его периметр?

Ответ: 16.

14) В треугольнике основание и высота в сумме составляют 20 *см*. Вычислите длину основания, при котором площадь треугольника будет наибольшей.

Ответ: 10 *см*.

15) Вычислите наибольший объем цилиндра, у которого диагональ осевого сечения равна $5\sqrt{3}$.

Ответ: $62{,}5\pi$.

16) Определите наибольшую площадь прямоугольника вписанного в круг радиуса R.

Ответ: $2R^2$.

17) Из 32 спичек постройте прямоугольник наибольшей площади.

Ответ: квадрат со стороной 8 спичек.

18) Участок в форме прямоугольника площадью 200 с трех сторон огородили забором. Найдите наименьшую длину всей изгороди.

Ответ: 40.

19) Сумма длин диагоналей ромба равна 8. Какое наибольшее значение может принимать его площадь?

Ответ: 8.

20) В прямоугольный треугольник с гипотенузой 16 и углом $60°$ вписан прямоугольник, основание которого лежит на гипотенузе. Каковы должны быть размеры прямоугольника, чтобы его площадь была наибольшей?

Ответ: 8; $2\sqrt{3}$.

§ 4. ПРОИЗВОДНАЯ И УРАВНЕНИЕ КАСАТЕЛЬНОЙ

›ЛОК 1.

А

Составьте уравнение касательной к графику функции $y=f(x)$ **в ıочке с абсциссой** x_0 **:**

1) $f(x)=2x^2-1$; $x_0=0$

2) $f(x)=\frac{1}{x^4+2}$; $x_0=0$

3) $f(x)=\sqrt{2x^2+1}$; $x_0=2$

4) $f(x)=x\ln x$; $x_0=e$

5) $f(x)=\frac{x}{x^2+1}$; $x_0=2$

6) $f(x)=x\cdot e^{x-1}$; $x_0=1$

7) $f(x)=e^{2x-1}-\cos 2\pi x-1$; $x_0=\frac{1}{2}$

8) $f(x)=\ln(2x-1)+\sin\frac{\pi x}{2}-2$; $x_0=1$

9) $f(x)=\frac{1}{(2x-1)^2}$; $x_0=1$

10) $f(x)=(2x+1)^3$; $x_0=-1$

Найдите угловой коэффициент касательной, проведенной к графику функции $y=f(x)$ **в точке с абсциссой** x_0 **:**

11) $f(x)=x^2-3x+2$; $x_0=2$

12) $f(x)=x^3-3x^2+2$; $x_0=2$

13) $f(x)=\frac{x+1}{x-3}$; $x_0=1$

14) $f(x)=\ln(4x-1)$; $x_0=\frac{1}{2}$

15) $f(x)=\frac{1}{2}\sin 2x-\sin x$; $x_0=\frac{\pi}{3}$

16) $f(x)=3\sin x+12x$; $x_0=-\frac{\pi}{2}$

17) $f(x)=3x-4\ln x$; $x_0=2$

18) $f(x)=(x-1)^2(x+1)^2-(x^2+1)^2$; $x_0=1$

19) $f(x)=\dfrac{1-2x}{4x+1}$; $x_0=-\dfrac{1}{2}$

20) $f(x)=x^5-5x^2-3$; $x_0=-1$

Вычислите угол, образованный касательной к графику функции $y=f(x)$ в заданной точке x_0 и положительным направлением оси абсцисс:

21) $f(x)=2x^2+3x+4$; $x_0=-1$

22) $f(x)=\dfrac{2}{x}$; $x_0=\sqrt{2}$

23) $f(x)=x^2-2x+5$; $x_0=\dfrac{1}{2}$

24) $f(x)=\dfrac{1}{1-x}$; $x_0=2$

25) $f(x)=\dfrac{x-2}{x+3}$; $x_0=0$

26) $f(x)=x^2-3x+2$; $x_0=2$

27) $f(x)=\dfrac{1-x}{x}$; $x_0=1$

28) $f(x)=x^2-8x+20$; $x_0=4$

29) $f(x)=\dfrac{64\sqrt{3}}{5x^5}$; $x_0=2$

30) $f(x)=2x^2+4x-3$; $x_0=-\dfrac{3}{4}$

ОТВЕТЫ

1) $y=-1$

2) $y=\dfrac{1}{2}$

3) $y=\dfrac{4}{3}x+\dfrac{1}{3}$

4) $y=2x-e$

5) $y=-\dfrac{3}{25}x+\dfrac{16}{25}$

6) $y=2x-1$

7) $y=2x$

8) $y=2x-3$

9) $y=-4x+5$

10) $y=6x+5$

11) 1

12) 0

13) −1

14) 4

15) −1

16) 12

17) 1 18) -8 19) -6 20) 15

21) $\frac{3\pi}{4}$ 22) $\frac{3\pi}{4}$ 23) $\frac{3\pi}{4}$ 24) $\frac{\pi}{4}$

25) $\operatorname{arc\,tg}\left(\frac{5}{9}\right)$ 26) $\frac{\pi}{4}$ 27) $\frac{3\pi}{4}$ 28) 0

29) 120° 30) $\frac{\pi}{4}$

БЛОК 2.

В

1) α - угол между касательной к графику функции $y=\frac{x}{1-x}$ в точке $x_0=3$ и осью абсцисс. Чему равен $\cos 2\alpha$?

2) Угловой коэффициент касательной, проведенной к параболе $y=x^2-2x$ в ее точке $(x_0; y_0)$ равен 4. Напишите уравнение этой касательной.

3) В какой точке графика функции $y=-\frac{1}{2}x^2+2x$ касательная к графику будет параллельна прямой, заданной уравнением $y=-2x$?

4) Найдите значение параметра, при котором прямая $y=5x+a$ будет являться касательной к графику функции $y=x^2-x+1$.

5) Найдите уравнение прямой, проходящей через точку $(3; 4)$ параллельно касательной к кривой $y=x^2$ в точке, абсцисса которой равна 3.

6) Найдите уравнение перпендикуляра, проходящего через точку $(3; 5)$, опущенного на касательную к кривой $y=x^2-2x+4$ в точке, абсцисса которой равна 0.

7) Найдите уравнения касательных к параболе $f(x)=x^2-2x-15$ в точках пересечения ее с осью абсцисс.

8) Найдите общую точку касательных к графику $f(x)=x^2-4x+3$, одна из которых касается графика в точке с абсциссой 3, другая в точке с абсциссой 1.

9) На кривой, определяемой уравнением $f(x)=3x-x^2$, найдите точку, в которой касательная наклонена под углом $45°$ к оси абсцисс.

10) Найдите угол наклона к оси абсцисс касательной, проведенной к кривой $f(x)=(x-3)(x-2)$ в точке пересечения этой кривой с осью ординат.

11) При каких значениях параметра b касательная, проведенная к графику функции $f(x)=bx^3-x^2+3$, в точке с абсциссой $x_0=1$, проходит через точку $(2;8)$?

12) Составьте уравнения касательных, проведенных к графикам функций $y=x^2$ и $y=x^2+3x-6$ в точке их пересечения.

13) Найдите точку пересечения касательной к графику функции $f(x)=-8\sqrt{x-4}$ и оси абсцисс, если угловой коэффициент касательной $k=-0{,}8$.

14) При каком значении a парабола $f(x)=x^2+ax+3$ в точке пересечения с осью Oy имеет угловой коэффициент касательной, равный 2?

15) Найдите угловой коэффициент касательной к кривой $f(x)=x^3-2x+4$ в точке пересечения ее с кривой $y=x^3$.

16) На графике функции $f(x)=e^x$ найдите точку, касательная в которой параллельна прямой $y=\frac{x}{2}-1$.

17) К параболе $y=4-x^2$ в точке с абсциссой $x_0=1$ проведена касательная. Найдите координаты точки пересечения этой касательной с осью ординат.

18) Найдите уравнение общей касательной к параболам $y = x^2 - 5x + 6$ и $y = x^2 + x + 1$.

19) В точке с координатами $(1;8)$ к графику функции $f(x) = \sqrt{\left(5 - x^{\frac{2}{3}}\right)^3}$ проведена касательная. Найдите длину ее отрезка, заключенного между осями координат.

20) Вычислите площадь треугольника, ограниченного осями координат и касательной к графику функции $y = \frac{x}{2x-1}$ в точке с абсциссой $x_0 = 1$.

ОТВЕТЫ

1) $\frac{15}{17}$

2) $y = 4x - 9$

3) $(4;0)$

4) $a = -8$

5) $y = 6x - 14$

6) $y = \frac{x}{2} + \frac{7}{2}$

7) $y = 8x - 40$; $y = -8x - 24$

8) $(2;-2)$

9) $(1;2)$

10) $\pi - \operatorname{arctg} 5$

11) $b = 2$

12) $y = 4x - 4$; $y = 7x - 10$

13) $(-21;0)$

14) $a = 2$

15) 10

16) $\left(-\ln 2; \frac{1}{2}\right)$

17) $(0;5)$

18) $y = -\frac{x}{3} + \frac{5}{9}$

19) $5\sqrt{5}$

20) 2

§ 5. ПЕРВООБРАЗНАЯ ФУНКЦИИ И ЕЕ ВЫЧИСЛЕНИЯ. ПРИЛОЖЕНИЯ ОПРЕДЕЛЕННОГО ИНТЕГРАЛА

БЛОК 1.

Найдите общий вид первообразной для функции:

A

1) $f(x)=\sin(3x-4)$

2) $f(x)=\dfrac{3}{\cos^2 5x}$

3) $f(x)=2\sin\dfrac{x}{5}+3\cos 6x$

4) $f(x)=\dfrac{1}{\sqrt{3x-2}}$

5) $f(x)=\dfrac{6}{(5x-7)^3}$

6) $f(x)=e^{2x-3}$

7) $f(x)=2^{0{,}5x+1}$

8) $f(x)=\dfrac{2}{4x-1}$

9) $f(x)=\dfrac{1}{3\sin^2 x}+\dfrac{1}{x^3}$

10) $f(x)=\dfrac{2}{x^3}-\dfrac{4}{x^5}+\dfrac{6}{x^7}$

11) $f(x)=\sqrt{x^5}+\dfrac{1}{\sqrt[3]{x^2}}$

B

12) $f(x)=\sqrt{\dfrac{x}{5}}+4\sin(4x+2)$

13) $f(x)=\dfrac{x^5+x^3-2}{x^2+1}$

14) $f(x)=\dfrac{x^2-1}{1+x^2}$

15) $f(x)=\dfrac{1}{1+\cos x}$

16) $f(x)=(x+1)(x-1)(x+2)$

17) $f(x)=\dfrac{\cos 2x}{\sin^2 x}$

18) $f(x)=2\cos x\cdot\cos 5x$

19) $f(x)=\operatorname{tg}^2 x$

20) $f(x)=\dfrac{1}{\sqrt{9-16x^2}}$

21) $f(x)=\dfrac{1}{16+x^2}$

22) $f(x)=\dfrac{\sqrt{x^3}-1}{\sqrt{x}-1}$

23) $f(x)=\dfrac{x\sqrt{x}}{\sqrt[4]{x^3}}$

24) $f(x)=\dfrac{x-\sqrt[3]{x^2}}{\sqrt{x}}$

25) $f(x)=\dfrac{3\cdot 2^x-2\cdot 3^x}{2^x}$

26) $f(x)=2^x\cdot 3^x\cdot 5^x$

27) $f(x)=\dfrac{\left(1+\sqrt{x}\right)^2}{x}$

28) $f(x)=\cos\dfrac{x}{2}\cdot\sin\dfrac{3x}{2}$

29) $f(x)=\dfrac{\sin\left(\dfrac{\pi}{6}-2x\right)}{\cos^3\left(\dfrac{\pi}{3}+2x\right)}$

30) $f(x)=6\cos^2\left(\dfrac{\pi}{4}-3x\right)$

ОТВЕТЫ

1) $F(x)=-\dfrac{1}{3}\cos(3x-4)+C$

2) $F(x)=\dfrac{3}{5}\operatorname{tg}5x+C$

3) $F(x)=-10\cos\dfrac{x}{5}+\dfrac{1}{2}\sin 6x+C$

4) $F(x)=\dfrac{2}{3}\sqrt{3x-2}+C$

5) $F(x)=-\dfrac{3}{5(5x-7)^2}+C$

6) $F(x)=0{,}5e^{2x-3}+C$

7) $F(x)=\dfrac{2^{0{,}5x+2}}{\ln 2}+C$

8) $F(x)=0{,}5\ln|4x-1|+C$

9) $F(x)=-\dfrac{1}{3}\operatorname{ctg}x-\dfrac{1}{2x^2}+C$

10) $F(x)=-\dfrac{1}{x^2}+\dfrac{1}{x^4}-\dfrac{1}{x^6}+C$

11) $F(x)=\dfrac{2}{7}x^3\cdot\sqrt{x}+3\sqrt[3]{x}+C$

12) $F(x)=\dfrac{2x\sqrt{x}}{3\sqrt{5}}-\cos(4x+2)+C$

13) $F(x)=\frac{1}{4}x^4-2\operatorname{arctg}x+C$

14) $F(x)=x-2\operatorname{arctg}x+C$

15) $F(x)=\operatorname{tg}\frac{x}{2}+C$

16) $F(x)=\frac{x^4}{4}+\frac{2}{3}x^3-\frac{1}{2}x^2-2x+C$

17) $F(x)=-\operatorname{ctg}x-2x+C$

18) $F(x)=\frac{1}{4}\sin 4x+\frac{1}{6}\sin 6x+C$

19) $F(x)=\operatorname{tg}x-x+C$

20) $F(x)=\frac{1}{4}\arcsin\frac{4x}{3}+C$

21) $F(x)=\frac{1}{4}\operatorname{arctg}\frac{x}{4}+C$

22) $F(x)=\frac{x^2}{2}+\frac{2x\sqrt{x}}{3}+x+C$

23) $F(x)=\frac{4}{7}x\cdot\sqrt[4]{x^3}+C$

24) $F(x)=\frac{2}{3}x\sqrt{x}-\frac{6}{7}x\cdot\sqrt[6]{x}+C$

25) $F(x)=3x-2\frac{\left(\frac{3}{2}\right)^x}{\ln\frac{3}{2}}+C$

26) $F(x)=\frac{30^x}{\ln 30}+C$

27) $F(x)=\ln|x|+4\sqrt{x}+x+C$

28) $F(x)=-\frac{1}{4}\cos 2x-\frac{1}{2}\cos x+C$

29) $F(x)=\frac{1}{2}\operatorname{tg}\left(2x+\frac{\pi}{3}\right)+C$

30) $F(x)=3x-\frac{1}{2}\cos 6x+C$

Для заданной функции $f(x)$ найдите первообразную $F(x)$, график которой проходит через данную точку $M_0\,(x_0;\,y_0)$:

А

1) $f(x)=2x^4$; $M_0(-1;2)$

2) $f(x)=\sin 2x$; $M_0(0;1)$

3) $f(x)=4x^2+9x^{-2}$; $M_0(3;-2)$

4) $f(x)=10x\sqrt{x}$; $M_0(1;5)$

5) $f(x)=x^3$; $M_0(2;1)$

6) $f(x)=8x^3-5$; $M_0(1;4)$

7) $f(x)=\sin 4x$; $M_0\left(\frac{\pi}{12};\frac{1}{2}\right)$

ОТВЕТЫ

1) $F(x)=\frac{2}{5}x^5+\frac{12}{5}$

2) $F(x)=-\frac{1}{2}\cos 2x+\frac{3}{2}$

3) $F(x)=\frac{4}{3}x^3-\frac{9}{x}-35$

4) $F(x)=4x^2\sqrt{x}+1$

5) $F(x)=\frac{x^4}{4}-3$

6) $F(x)=2x^4-5x+7$

7) $F(x)=-\frac{1}{4}\cos 4x+\frac{5}{8}$

БЛОК 2.

Вычислите интегралы:

А

1) $\int\limits_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{3}}\left(\frac{1}{\cos^2 x}-\frac{1}{\sin^2 x}\right)\mathrm{d}x$

2) $\int\limits_{1}^{2}\frac{\mathrm{d}x}{2-3x}$

3) $\int\limits_{1}^{6}\frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{x+3}}$

4) $\int\limits_{1}^{2}\left(3x^4+2x^2-5\right)\mathrm{d}x$

5) $\int\limits_{4}^{9}\left(\frac{2x}{5}+\frac{1}{2\sqrt{x}}\right)\mathrm{d}x$

6) $\int\limits_{0}^{1}\frac{\mathrm{d}x}{(2x+1)^3}$

7) $\int\limits_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}}\left(\frac{1}{\cos^2 x}-\sin x\right)\mathrm{d}x$

8) $\int\limits_{1}^{4}\frac{6}{x\sqrt{x}}\mathrm{d}x$

9) $\int\limits_{3}^{11} \frac{dx}{\sqrt{2x+3}}$

10) $\int\limits_{2\ln 2}^{\ln 2} e^{2x}\, dx$

11) $\int\limits_{0}^{4} \frac{dx}{0,5x+1}$

12) $\int\limits_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} \left(1+\mathrm{ctg}^2 x\right) dx$

13) $\int\limits_{0}^{\frac{\pi}{4}} \mathrm{tg}^2 x\, dx$

B

14) $\int\limits_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \sin^2 x\, dx$

15) $\int\limits_{0}^{\frac{\pi}{8}} \left(1-2\sin^2 2x\right) dx$

16) $\int\limits_{0}^{1} \frac{9-4x^2+\sqrt{3-2x}}{3-2x}\, dx$

17) $\int\limits_{-1}^{\frac{\sqrt{3}}{2}} \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}$

18) $\int\limits_{0}^{\sqrt{3}} \frac{dx}{9+x^2}$

19) $\int\limits_{-2}^{14} \sqrt[3]{\left(\frac{x}{2}+1\right)^2}\, dx$

20) $\int\limits_{1}^{4} \frac{(x-2)^2}{\sqrt{x}}\, dx$

21) $\int\limits_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{3}} \left(\cos^2\left(x+\frac{\pi}{3}\right)-\sin^2\left(x+\frac{\pi}{3}\right)\right) dx$

22) $\int\limits_{-2}^{2} \frac{x^3+x+x^2+1}{1+x^2}\, dx$

23) $\int\limits_{0}^{2} |1-5x|\, dx$

24) $\int\limits_{0}^{3} |2-x|\, dx$

25) $\int\limits_{1}^{4} \frac{x\cdot\sqrt[5]{x^2}}{\sqrt[10]{x^9}}\, dx$

26) $\int\limits_0^4 \frac{dx}{16+x^2}$

27) $\int\limits_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{3}} \frac{dx}{\sin^2 x \cdot \cos^2 x}$

28) $\int\limits_1^9 \frac{x-1}{\sqrt{x}+1} dx$

29) $\int\limits_{\frac{\sqrt{2}}{2}}^{\frac{\sqrt{3}}{2}} \frac{dx}{2\sqrt{1-x^2}}$

30) $\int\limits_0^1 \sqrt{x\sqrt{x\sqrt{x}}}\, dx$

ОТВЕТЫ

1) 0 2) $-\frac{2}{3}\ln 2$ 3) 2 4) $\frac{274}{15}$ 5) 14

6) $\frac{2}{9}$ 7) 2 8) 6 9) 2 10) -6

11) $\ln 9$ 12) 1 13) $1-\frac{\pi}{4}$ 14) $\frac{\pi}{2}$ 15) $\frac{1}{4}$

16) $3+\sqrt{3}$ 17) $\frac{5\pi}{6}$ 18) $\frac{\pi}{18}$ 19) 38,4 20) $\frac{26}{15}$

21) $-\frac{\sqrt{3}}{4}$ 22) 4 23) $\frac{41}{5}$ 24) 2,5 25) $\frac{14}{3}$

26) $\frac{\pi}{16}$ 27) $\frac{2}{\sqrt{3}}$ 28) $\frac{28}{3}$ 29) $\frac{\pi}{24}$ 30) $\frac{8}{15}$

Решите уравнения:

В

1) $\int_{0}^{3} x^2\,dx = 4y^2 + 5$

2) $\int_{0}^{2} (x+1)\,dx = y^2$

3) $\int_{-1}^{3} (x+3)\,dx = y^2 - y$

4) $\int_{0}^{3} (x^2+1)\,dx = y^2 + y$

5) $\int_{0}^{2} (x-2)\,dx = y^2 + 3y$

ОТВЕТЫ

1) ± 1 2) ± 2 3) $\frac{1 \pm \sqrt{65}}{2}$ 4) $-4;\ 3$ 5) $-2;\ -1$

Решите неравенства:

В

1) $\int_{-2}^{4} (x+3)\,dx \geq y^2 + 8$

2) $\int_{-3}^{0} (x+4)\,dx \leq y^2 - \frac{3}{2}$

3) $\int_{2}^{6} (x-2)\,dx \geq y^2 + 2$

4) $\int_{-2}^{4} (x+2)\,dx \geq y^2 + 15$

5) $\int_{-1}^{3} (x+5)\,dx \leq 2y^2 + 6$

ОТВЕТЫ

1) $[-4; 4]$ 2) $(-\infty; -3] \cup [3; \infty)$ 3) $[-\sqrt{6}; \sqrt{6}]$

4) $[-\sqrt{3}; \sqrt{3}]$ 5) $(-\infty; -3] \cup [3; \infty)$

БЛОК 3. Вычислите площадь фигуры, ограниченной линиями:

A

1) $y = x^2$; $y = 2x$.

2) $y = x$; $y = \frac{1}{x}$; $y = 0$; $x = e$.

3) $y = 9 - x^2$; $y = x^2 + 1$; $x = 0$.

4) $y = 2\sin x$; $y = 1$; $x \in [0; \pi]$.

5) $y = \frac{1}{4}x^3$; $y = \sqrt{2x}$.

B

6) $y = 2\cos x$; $y = 0$; $x = \frac{\pi}{6}$; $x = \frac{\pi}{3}$.

7) $y = 4x - x^2$; $y = 0$.

8) $y = \frac{6}{x}$; $y + x = 7$.

9) $y = x^2$; $y = \frac{1}{x^2}$; $y = 0$; $x = 2$; $x \geq 0$.

10) $y = 2x - 2$ и графиком ее первообразной $F(x)$, зная, что $F(0) = 1$.

11) $y = 4x - x^2$ и прямой, проходящей через точки $(4; 0)$ и $(0; 4)$.

12) $y = \int\limits_{x^2}^{x^2+1} t\,\mathrm{d}t$ и прямой $y = 1{,}5$.

13) $y = 1 - x$; $y = 0$; $y = (x+1)^2$; $x \geq -1$.

14) $y = (x-2)(2x-3)$; $y = 0$.

15) $y = x^2 - 2x + 1$ и графиком ее производной $y'(x)$.

16) $y = 2\sqrt{x}$; $y = 4$; $x = 0$.

17) $y = 3^x$; $y = 9^x$; $x = 1$.

18) $y = \sqrt{x}$; $y = \sqrt{4-3x}$; $y = 0$.

19) $y = \dfrac{4}{x^2}$; $y = -3x + 7$.

20) $y = x^2 - 6x + 4$; $y = 4 - x^2$.

21) $y = -6x$; $y = 0$; $x = 4$.

22) $y = \dfrac{1}{1+x^2}$; $y = 0$; $x = 0$; $x = 1$.

23) $y = \dfrac{3}{\sqrt{x}}$; $y = 0$; $x = 1$; $x = 4$.

24) $y = \sin x$; $y = \cos x$; $x = 0$; $x \in \left[0; \dfrac{\pi}{4}\right]$.

25) $y = \sqrt{x}$; $y = x - 6$; $y = 0$.

26) $y = 3 - |x - 3|$; $y = 0$.

27) $y = |x^2 - 4|$; $y = 0$; $x = -1$; $x \in [-1; 2]$.

28) $y = x^2 - 2x + 2$, касательной к ней в точке $M(3; 5)$; $x = 0$.

ОТВЕТЫ

1) $1\dfrac{1}{3}$

2) 1,5

3) $\dfrac{32}{3}$

4) $2\sqrt{3} - \dfrac{2\pi}{3}$

5) $1\dfrac{2}{3}$

6) $\sqrt{3} - 1$

7) $\dfrac{32}{3}$

8) $17{,}5 - 6\ln 6$

9) $\frac{5}{6}$ 10) $\frac{4}{3}$ 11) 4,5 12) $\frac{4}{3}$

13) $\frac{5}{6}$ 14) $\frac{1}{24}$ 15) $\frac{4}{3}$ 16) $5\frac{1}{3}$

17) $\frac{2}{\ln 3}$ 18) $\frac{8}{9}$ 19) $\frac{1}{2}$ 20) 9

21) 48 22) $\frac{\pi}{4}$ 23) 6 24) $\sqrt{2}-1$

25) 13,5 26) 9 27) 9 28) 9

<u>БЛОК 4</u>. Найдите объем тела, полученного при вращении вокруг оси абсцисс криволинейной трапеции, ограниченной линиями:

В

1) $y = x^2$; $y = x$.

2) $y = x + 2$; $y = 1$; $x = 0$; $x = 2$.

3) $y = \sqrt{x}$; $y = x$.

4) $y = \sin x$; $y = 0$; $x \in [0; \pi]$.

5) $y = \frac{1}{x}$; $y = 0$; $x = \frac{1}{2}$; $x = 2$; $y = x$.

6) $y = \frac{1}{x}$; $x = 2$; $x = 3$; $y = 0$.

7) $y = x^3$; $y = \sqrt{2 - x}$; $x = 0$.

8) $y = x^2 + 1$; $x = 0$; $x = 3$; $y = 0$.

9) $y = \sqrt{4x}$; $y = \frac{1}{4}x^2$.

10) $y = 2 - 2x^2$; $y = 0$.

11) $y=\frac{1}{x^2}$; $x=\frac{1}{2}$; $y=x$.

12) $y=\sin x$; $y=\frac{2}{\pi}x$; $x\in\left[0;\frac{\pi}{2}\right]$.

13) $y=\sqrt{\cos x}$; $y=0$; $x=-\frac{\pi}{4}$; $x=\frac{\pi}{4}$.

14) $y=x^2$; $y=\sqrt{x}$.

15) $xy=2$; $x=1$; $x=2$; $y=0$.

16) $2x-3y-6=0$; $x-3=0$; $x-9=0$; $y=0$.

17) $y=\frac{1}{3}x^2$; $x=0$; $y=0$; $x=3$.

ОТВЕТЫ

1) $\frac{2\pi}{15}$ 2) $16\frac{2}{3}\pi$ 3) $\frac{\pi}{6}$ 4) $\frac{\pi^2}{2}$

5) $\frac{19\pi}{24}$ 6) $\frac{\pi}{6}$ 7) $1\frac{5}{14}\pi$ 8) $69{,}6\pi$

9) $19{,}2\pi$ 10) $\frac{64\pi}{15}$ 11) $\frac{49\pi}{24}$ 12) $\frac{\pi^2}{12}$

13) $\sqrt{2}\pi$ 14) $\frac{3\pi}{10}$ 15) 2π 16) 32π

17) $\frac{27\pi}{5}$

ГЛАВА VIII. ПЛАНИМЕТРИЯ

§ 1. ТРЕУГОЛЬНИКИ

БЛОК 1. Решите задачи по теме «Произвольный треугольник»:

А

1. Найдите площадь треугольника, если известны длины его сторон 4 и 6 и тангенс угла между ними, равный 0,75.

Ответ: 7,2.

2. В треугольнике основание равно 60, высота 12, медиана, проведенная к основанию, равна 13. Определите большую боковую сторону треугольника.

Ответ: 37.

3. Угол треугольника равен $\frac{\pi}{3}$, а противолежащая сторона $\sqrt{7}$. Длины других сторон относятся, как $a:b=3:1$. Найдите большую сторону треугольника.

Ответ: 3.

4. Найдите площадь треугольника со сторонами 4, 13 и 15.

Ответ: 24.

5. Радиус окружности, вписанной в треугольник, равен 3, а периметр треугольника – 20. Найдите площадь треугольника.

Ответ: 30.

6. В треугольнике ABC $AB=8$, $AC=5$, $\angle A:\angle B:\angle C=3:4:11$. Найдите площадь треугольника.

Ответ: 10.

7. В треугольнике ABC: $\angle A=73°$, $\angle B=85°$. Чему равен угол между биссектрисой угла A и высотой, опущенной на сторону BC?

Ответ: $31{,}5°$.

8. Высота треугольника равна 12 и делит сторону, равную 21, в отношении $5:16$. Найдите периметр треугольника.

Ответ: 54.

9. Высота треугольника равна 4. Она делит его на два треугольника соответственно с периметрами 16 и 23. Найдите периметр данного треугольника.

Ответ: 31.

10. Найдите длину стороны AC треугольника ABC, в котором угол B тупой, $AB = 13$, $BC = 2$ и $\sin\angle B = \frac{5}{13}$.

Ответ: $\sqrt{221}$.

11. Найдите отношение площади четырехугольника к площади треугольника, на которые делится треугольник своей средней линией.

Ответ: $3:1$.

12. В треугольнике две медианы длиной 3 и 4 пересекаются под прямым углом. Найдите площадь треугольника.

Ответ: 8.

13. Площадь треугольника ABC равна 36. На стороне AC выбрана точка K так, что $AK:KC = 1:5$. Найдите площадь треугольника KBC.

Ответ: 30.

14. Вычислите радиус окружности, описанной около треугольника, величины углов которого пропорциональны числам 2; 3 и 4, если его средняя сторона равна $4\sqrt{3}$.

Ответ: 4.

15. Из середины стороны треугольника проведены прямые, параллельные двум другим его сторонам. Найдите площадь получившегося четырехугольника, если площадь данного треугольника равна 60.

Ответ: 30.

16. В треугольнике ABC известны длины сторон: $AB = 8$, $BC = 6$, $CA = 3$; BD и AE – биссектрисы соответствующих углов Найдите отношение площадей треугольников ABC и CDE.

Ответ: $\frac{77}{9}$.

17. Найдите площадь треугольника, если основание равно a, углы при основании равны $\frac{\pi}{6}$ и $\frac{\pi}{4}$.

Ответ: $\frac{a^2}{4}(\sqrt{3}-1)$.

18. В треугольнике ABC угол A равен $30°$, а сторона BC в два раза больше стороны AB. Найдите высоту BD, проведенную из вершины B к стороне AC, если площадь треугольника BDC равна $4\sqrt{15}$.

Ответ: $2\sqrt{2}$.

19. Две стороны треугольника равны соответственно 6 и 8. Медианы, опущенные на эти стороны, взаимно перпендикулярны. Найдите третью сторону треугольника.

Ответ: $2\sqrt{5}$.

20. В треугольнике ABC $\angle B = 120°$, $AB = 7$, $AC = 13$. Найдите площадь треугольника.

Ответ: $14\sqrt{3}$.

21. Биссектриса внутреннего угла треугольника делит сторону на отрезки 13 и 15. Найдите площадь треугольника, если сумма двух других сторон равна 56.

Ответ: 336.

22. Биссектриса угла N треугольника MNP делит сторону MP на отрезки 28 и 12. Найдите периметр треугольника MNP, если $MN - NP = 18$.

Ответ: 85.

23. Найдите наименьшую высоту треугольника, стороны которого 13; 14 и 15.

Ответ: 11,2.

24. Точка O равноудалена от вершин треугольника ABC, $\angle ABO = 48°$. Найдите угол $\angle ACB$.

Ответ: $42°$.

25. Площадь треугольника PQR равна 36. Точка S делит сторону PQ в отношении $1:3$, а точка T - середина стороны QR. Найдите площадь четырехугольника $STRP$.

Ответ: 22,5.

26. Найдите длины сторон AB и AC треугольника ABC, если $BC = 8$, а длины высот, опущенных на AC и BC, соответственно равны 6,4 и 4.

Ответ: $\sqrt{41}$; 5.

27. В треугольнике ABC сторона AC равна 26, а медианы, проведенные из вершин A и C, равны соответственно 36 и 15. Найдите третью медиану.

Ответ: 39.

28. В тупоугольном треугольнике большая сторона равна 16, а высоты, проведенные из обоих ее концов, отстоят от вершины тупого угла на 2 и 3. Определите две меньшие стороны треугольника.

Ответ: 8; 12.

29. В треугольнике ABC: $AB = 6$, $BC = 9$, $AC = 5$, проведены биссектриса BM и медиана BN $(M \in AC, N \in AC)$. Найдите длину отрезка MN.

Ответ: 0,5.

30. Площадь треугольника ABC равна 100. На стороне AB взята точка M, причем $AM : AB = 3:10$. На стороне BC взята точка N, причем $BN : BC = 6:10$. На стороне CA взята точка K, причем $CK : CA = 7:10$. Найдите площадь треугольника MNK.

Ответ: 21.

31. В треугольник (длины сторон 6; 9; 11) вписан круг. Найдите длину меньшего из всех шести отрезков, на которые делят точки касания стороны треугольника.

Ответ: 2.

32. В треугольнике ABC длина стороны $AB = 19$, углы $\angle A = \operatorname{arctg}\frac{5}{2}$, $\angle B = \operatorname{arctg}\frac{2}{3}$. Найдите площадь треугольника ABC.

Ответ: 95.

33. В треугольнике ABC проведены биссектриса BM и высота BN, причем $M \in AC$ и $N \in AC$, длины отрезков $AM = 8$, $MN = 1$, $NC = 3$. Найдите квадрат высоты BN.

Ответ: 15.

34. В треугольнике ABC проведена медиана AM. Найдите площадь треугольника ABC, если $AC = 3\sqrt{2}$, $BC = 10$, $\angle MAC = 45°$.

Ответ: 21.

35. Точка K лежит на стороне AB треугольника ABO, $BK = 12$, $AK = 4$, $\angle BOK = \angle BAO$, $\cos\angle B = \frac{\sqrt{6}}{3}$. Найдите площадь треугольника OBK.

Ответ: 48.

36. В треугольнике ABC угол A - тупой, $\angle C = 30°$, $AB = 5$, $BC = 8$. Найдите сторону AC.

Ответ: $4\sqrt{3} - 3$.

37. Сторона BC треугольника ABC равна 25, высота $BD = 15$, радиус описанной окружности $R = 32{,}5$. Определите две другие стороны треугольника.

Ответ: 39; 56.

38. Синусы двух острых углов треугольника равны $\frac{3}{5}$ и $\frac{5}{13}$, а радиус описанной окружности равен 32,5. Найдите площадь треугольника.

Ответ: 420.

39. Две стороны треугольника равны 2 и $2\sqrt{15}$, а медиана третьей стороны равна 4. Найдите площадь треугольника.

Ответ: $2\sqrt{15}$.

40. В треугольнике MNK угол $\angle MNK$ - тупой. Высоты MD и KE пересекаются в точке P. $PN = 5$, $MK = 10$. Найдите площ. и. четырехугольника $MNKP$.

Ответ: 25.

БЛОК 2. Решите задачи по теме «Равнобедренный треугольник .

А

1. В равнобедренном треугольнике $AB = BC = 2$, $AC = 1$. Найдите длину медианы AM .

Ответ: $\frac{\sqrt{6}}{2}$.

2. В равнобедренном треугольнике угол при основании равен $\frac{\pi}{4}$, а боковая сторона равна $3\sqrt{2}$. На каком расстоянии от вершины пересекаются медианы?

Ответ: 2.

3. В равнобедренном треугольнике ABC $(AB = BC)$ радиус вписанного круга составляет 0,4 высоты BD, а периметр треугольника равен 40. Найдите длину основания AC.

Ответ: 16.

4. В равнобедренном треугольнике ABC $(AB = BC)$ основание $AC = 48$, а боковая сторона равна 30. Определите радиус описанной окружности.

Ответ: 25.

5. Высота равнобедренного треугольника, проведенная к боковой стороне, равна 4. Угол при вершине равен $\frac{2\pi}{3}$. Найдите длину основания треугольника.

Ответ: 8.

6. Периметр равнобедренного треугольника ABC $(AB = BC)$ равен 95, а основание AC составляет 40% периметра. Найдите длину боковой стороны AB.

Ответ: 28,5.

7. Периметр равнобедренного треугольника равен 32, основание относится к боковой стороне, как $6:5$. Определите площадь треугольника.

Ответ: 48.

8. Найдите радиус r вписанной и R радиус описанной окружностей для равнобедренного треугольника с основанием 10 и боковой стороной 13.

Ответ: $r = \frac{10}{3}$; $R = \frac{169}{24}$.

9. В равнобедренном треугольнике ABC с основанием AC проведены биссектриса AF и высота AH. Найдите углы треугольника AHF, если $\angle B = 112°$.

Ответ: $39°$, $51°$ и $90°$.

10. В равнобедренном треугольнике основание и высота равны 4. Найдите площадь круга, описанного около этого треугольника.

Ответ: $\frac{25\pi}{4}$.

11. Найдите площадь равнобедренного треугольника, если высота, проведенная к боковой стороне, равна 8 и образует с основанием угол в $45°$.

Ответ: 32.

12. Угол при основании равнобедренного треугольника равен $30°$. Найдите угол между одной из боковых сторон и высотой, опущенной на другую боковую сторону.

Ответ: $30°$.

13. Боковая сторона равнобедренного треугольника равна 5, а косинус угла при вершине равен $\frac{7}{25}$. Найдите длину высоты, опущенной на боковую сторону треугольника.

Ответ: 4,8.

14. Найдите длину основания равнобедренного треугольника, площадь которого равна 25, а углы α при основании таковы, что $\operatorname{tg} \alpha = 4$.

Ответ: 5.

15. Около равнобедренного треугольника ABC с основанием AC и углом при основании 75° описана окружность с центром O. Найдите ее радиус, если площадь треугольника BOC равна 16.

Ответ: 8.

16. В равнобедренный треугольник ABC вписана окружность. Параллельно его основанию AC проведена касательная к окружности, пересекающая боковые стороны в точках D и E. Найдите радиус окружности, если $DE = 8$, $AC = 18$.

Ответ: 6.

17. В равнобедренном треугольнике длина основания 15, высота, опущенная на боковую сторону, равна 12. Определите площадь треугольника.

Ответ: 75.

18. Периметр равнобедренного треугольника равен 128, а его основание – 48. Найдите радиус окружности, вписанной в треугольник.

Ответ: 12.

19. В равнобедренном треугольнике высота, проведенная к основанию, равна 20, а основание относится к боковой стороне, как $2:3$. Определите радиус вписанного круга.

Ответ: 5.

20. В окружность радиусом 10 вписан равнобедренный треугольник с углом при вершине, равным 120° Найдите стороны треугольника.

Ответ: 10; 10; $10\sqrt{3}$.

21. В равнобедренном треугольнике с боковой стороной a и углом при вершине $\alpha = \arccos 0{,}9$, найдите расстояние между основаниями медианы и высоты, проведенных к боковой стороне из одной и той же вершины основания.

Ответ: $0{,}4a$.

22. В равнобедренный треугольник ABC с основанием $AC=6$ вписана окружность, которая точкой касания делит боковые стороны в отношении $7:6$. Найдите периметр треугольника, если $\angle B < 60°$.

Ответ: 19.

В

23. В равнобедренный треугольник ABC $(AB=BC)$ вписана окружность. Величина высоты BD, опущенной из вершины треугольника, равна 8. Найдите радиус вписанной окружности, если $\cos\angle A = \frac{3}{5}$.

Ответ: 3.

24. В равнобедренном треугольнике ABC $(AB=BC)$ сторона $AB=12$. Через середину высоты BD проведен отрезок $MN \parallel BC$. Найдите длину MN.

Ответ: 9.

25. В равнобедренный треугольник, у которого боковая сторона равна 50, а основание 60, вписан круг. Определите расстояние между точками касания, находящимися на боковых сторонах.

Ответ: 24.

26. Точка M лежит внутри равнобедренного треугольника ABC с основанием AC на расстоянии 6 от боковых сторон и на расстоянии $\sqrt{3}$ от основания. Найдите основание треугольника ABC, если $\angle B = 120°$.

Ответ: 30.

27. Найдите площадь равнобедренного треугольника с основанием $4\sqrt{2}$ и медианой к боковой стороне, равной 5.

Ответ: $4\sqrt{14}$.

28. В равнобедренном треугольнике угол равен $120°$, через его вершину проведена прямая под углом в $60°$ к большей стороне. Найдите отношение площадей полученных частей треугольника.

Ответ: $1:2$.

29. Основание равнобедренного треугольника равно 2, медианы, проведенные к боковым сторонам, взаимно перпендикулярны. Найдите площадь треугольника.

Ответ: 3.

30. В равнобедренном треугольнике ABC $(AB = BC)$ через точку пересечения медиан проведена прямая, параллельная AC и пересекающая сторону AB в точке M, а сторону BC в точке N. Определите отрезки, на которые этой прямой делится сторона AB, если $MN = 12$, а площадь треугольника ABC равна 108.

Ответ: 5; 10.

31. В равнобедренном треугольнике ABC $(AB = BC)$ из вершины A как из центра проведена дуга окружности радиуса AC, которая пересекает сторону AB в точке D. Определите сторону BC, если $AC = 6$, $DC = 8$.

Ответ: 27.

32. Остроугольный равнобедренный треугольник BCD с основанием $CD = 16$, вписан в окружность с центром O и радиусом 10. Найдите площадь треугольника BOC.

Ответ: 40.

БЛОК 3. Решите задачи по теме «Равносторонний треугольник»:

А

1. В равностороннем треугольнике ABC отмечены точки K, L и M, которые являются серединами сторон AB, BC, AC соответственно. Найдите периметр параллелограмма $AKLM$, если периметр треугольника KBL равен 27.

Ответ: 36.

2. Высота равностороннего треугольника равна 10. Определите, на каком расстоянии от его сторон находится точка пересечения его биссектрис.

Ответ: $\frac{10}{3}$.

3. Вычислите высоту равностороннего треугольника, вписанного в окружность радиуса 10.

Ответ: 15.

4. Вычислите сторону равностороннего треугольника, описанного около окружности радиуса 10.

Ответ: $20\sqrt{3}$.

5. Вычислите радиус окружности, вписанной в равносторонний треугольник со стороной 4.

Ответ: $\frac{2\sqrt{3}}{3}$.

6. В правильном треугольнике высота равна 9. Найдите радиус вписанной в треугольник окружности.

Ответ: 3.

7. Вершина A равностороннего треугольника ABC соединена с точкой D, делящей сторону BC на отрезки $BD = 1$ и $DC = 2$. Определите отрезок AD.

Ответ: $\sqrt{7}$.

8. Определите радиус окружности, описанной около правильного треугольника, площадь которого равна $12\sqrt{3}$.

Ответ: 4.

9. В окружность вписаны правильный треугольник и квадрат. Сторона квадрата равна a. Найдите периметр треугольника.

Ответ: $\frac{3a\sqrt{6}}{2}$.

B

10. На стороне правильного треугольника, равной 2, как на диаметре, построена окружность. Найдите площадь S общей части треугольника и круга.

Ответ: $\frac{\pi}{6} + \frac{\sqrt{3}}{2}$.

11. Сумма длин вписанной и описанной окружностей правильного треугольника равна $7\sqrt{3}\pi$. Найдите периметр треугольника.

Ответ: 21.

12. Площадь квадрата, вписанного в окружность, равна 16. Найдите площадь правильного треугольника, описанного около этой же окружности.

Ответ: $24\sqrt{3}$.

13. В круг, радиус которого R, вписан правильный треугольник, на стороне которого построен квадрат. Определите радиус окружности, описанной около квадрата.

Ответ: $\frac{1}{2}R\sqrt{6}$.

14. Около равностороннего треугольника описана окружность радиуса $2\sqrt{3}$, через центр которой проведена прямая, параллельная одной из сторон треугольника. Найдите длину отрезка этой прямой, заключенного между двумя другими сторонами треугольника.

Ответ: 4.

15. В равносторонний треугольник ABC вписана окружность и проведен отрезок MN, который касается ее и параллелен стороне AB. Определите периметр трапеции $AMNB$, если длина стороны $AB = 18$.

Ответ: 48.

<u>БЛОК 4</u>. Решите задачи по теме «<u>Прямоугольный треугольник</u>»:

А

1. В прямоугольном треугольнике острый угол равен 30°, а высота, проведенная из вершины прямого угла, равна $\sqrt{3}$. Найдите гипотенузу.

Ответ: 4.

2. Один из катетов прямоугольного треугольника равен 9, а радиус описанной окружности 6. Найдите расстояние от середины этого катета до центра окружности.

Ответ: $\frac{3\sqrt{7}}{2}$.

3. Гипотенуза прямоугольного треугольника равна 25, один из катетов 10. Найдите проекцию другого катета на гипотенузу.

Ответ: 21.

4. Длины катетов прямоугольного треугольника равны 12 и 35. Найдите длину медианы, проведенной к гипотенузе.

Ответ: 18,5.

5. Катеты прямоугольного треугольника равны 9 и 40. Найдите высоту этого треугольника, опущенную на гипотенузу.

Ответ: $8\frac{32}{41}$.

6. Найдите градусную меру меньшего угла прямоугольного треугольника, если радиус вписанного круга равен полуразности катетов.

Ответ: $30°$.

7. В прямоугольный треугольник с катетом, равным 6, вписан квадрат, имеющий с треугольником общий прямой угол. Найдите площадь треугольника, если диагональ квадрата равна $2\sqrt{2}$.

Ответ: 9.

8. В прямоугольный треугольник с острым углом $60°$ вписан ромб так, что угол $60°$ у них общий, а остальные три вершины ромба лежат на сторонах треугольника. Найдите длину большего катета, если сторона ромба равна 2,4.

Ответ: $3{,}6\sqrt{3}$.

9. В прямоугольном треугольнике ABC $(\angle C = 90°)$ CK - биссектриса, $\angle A = 15°$, $AC = \sqrt{3}$. Найдите AK.

Ответ: $\sqrt{2}$.

10. Радиус окружности, вписанной в прямоугольный треугольник с периметром 72, равен 6. Найдите радиус описанной окружности.

Ответ: 15.

11. В прямоугольный треугольник вписана окружность. Найдите периметр треугольника, если гипотенуза его равна 20, а радиус окружности равен 4.

Ответ: 48.

12. Площадь прямоугольного треугольника равна 8. Длина одного из катетов равна 5. Найдите меньший острый угол прямоугольного треугольника.

Ответ: $\operatorname{arc\,tg} 0,64$.

13. Катет прямоугольного треугольника равен 8, а его проекция на гипотенузу равна 6,4. Чему равна площадь этого треугольника?

Ответ: 24.

14. Один из катетов прямоугольного треугольника в 2 раза больше другого катета. Высота, опущенная на гипотенузу этого треугольника, равна 12. Найдите площадь треугольника.

Ответ: 180.

15. В прямоугольном треугольнике ABC на катете AB, как на диаметре, построена окружность, разбивающая гипотенузу на части в отношении $3:2$, считая от C. Найдите площадь этого треугольника, если гипотенуза равна 10.

Ответ: $10\sqrt{6}$.

16. В прямоугольном треугольнике ABC даны: катет $BC = 36$, косинус угла BAC равен $\frac{8}{17}$. Найдите площадь треугольника.

Ответ: 345,6.

В

17. Центр O окружности радиуса 3 лежит на гипотенузе AC прямоугольного треугольника ABC. Катеты треугольника касаются окружности. Найдите площадь треугольника ABC, если известно, что длина отрезка OC равна 5.

Ответ: $18\frac{3}{8}$.

18. Площадь прямоугольного треугольника 30, а тангенс одного из острых углов 2,4. Найдите гипотенузу.

Ответ: 13.

19. Гипотенуза прямоугольного треугольника равна 10, проекция меньшего катета на гипотенузу равна 3,6. Найдите радиус круга, вписанного в этот треугольник.

Ответ: 2.

20. В прямоугольном треугольнике точка касания вписанной окружности делит гипотенузу на отрезки длиной 5 и 12. Найдите радиус вписанной окружности.

Ответ: 3.

21. Найдите радиус окружности, описанной около прямоугольного треугольника, если радиус вписанной окружности равен 3, а один из катетов равен 10.

Ответ: $\frac{29}{4}$.

22. Отношение площадей круга и вписанного прямоугольного треугольника равно π. Найдите острый угол этого треугольника.

Ответ: $45°$.

23. Длина катета прямоугольного треугольника равна 100, синус прилежащего к этому катету острого угла равен $\frac{21}{29}$. Найдите радиус вписанной в него окружности.

Ответ: 30.

24. Гипотенуза прямоугольного треугольника равна 10, а радиус вписанной окружности 2. Найдите площадь треугольника.

Ответ: 24.

25. Биссектриса прямоугольного треугольника делит гипотенузу на отрезки 20 и 15. Найдите площадь треугольника.

Ответ: 294.

26. В прямоугольном треугольнике ABC длины катетов AC и BC соответственно равны 12 и 8. Точка K - середина медианы BD. Найдите длину отрезка CK.

Ответ: 5.

27. В прямоугольном треугольнике длины медиан, исходящих из вершин острых углов, равны 15 и $6\sqrt{5}$. Найдите гипотенузу треугольника.

Ответ: 18.

28. На катете BC прямоугольного треугольника ABC как на диаметре построена окружность, пересекающая гипотенузу AB в точке D так, что $AD:DB=16:9$. Найдите площадь треугольника ABC, если $AC=4$.

Ответ: 6.

29. В прямоугольном треугольнике ABC $(\angle C=90°)$ катеты равны 6 и 8. Проведена высота CD и медиана CM. Найдите площадь треугольника CDM.

Ответ: 3,36.

30. В окружность радиуса $5\sqrt{5}$ вписан прямоугольный треугольник так, что один из катетов вдвое ближе к центру, чем другой. Найдите длину большего катета.

Ответ: 20.

31. Катеты прямоугольного треугольника равны 15 и 20. Определите расстояние от центра вписанного круга до высоты, проведенной на гипотенузу.

Ответ: 1.

32. В прямоугольном треугольнике один из углов равен 30°. Найдите площадь треугольника, если радиус вписанной в него окружности равен 4.

Ответ: $48+32\sqrt{3}$.

33. Найдите отношение радиуса окружности, описанной около прямоугольного треугольника с острым углом в 60° к радиусу вписанной в этот треугольник окружности.

Ответ: $\sqrt{3}+1$.

34. В прямоугольном треугольнике с катетами 14 и 18 проведены медианы острых углов. Они разбивают исходный треугольник на три треугольника и четырехугольник. Какова площадь этого четырехугольника?

Ответ: 42.

35. Прямоугольный треугольник разделен высотой, проведенной к гипотенузе, на два треугольника с площадями 384 и 216. Найдите длину гипотенузы.

Ответ: 50.

36. Катеты прямоугольного треугольника равны 3 и 6. Найдите длину биссектрисы прямого угла.

Ответ: $2\sqrt{2}$.

БЛОК 5. Решите задачи по теме «Подобные треугольники»:

А

1. Стороны треугольника относятся, как $4:5:6$; меньшая сторона подобного ему треугольника равна 0,8. Определите другие стороны второго треугольника.

Ответ: 1; 1,2.

2. Стороны треугольника относятся, как $2:5:4$; периметр подобного ему треугольника равен 55. Определите стороны второго треугольника.

Ответ: 10; 25; 20.

3. В двух равнобедренных треугольниках углы при вершине равны. Боковая сторона и основание одного треугольника равны 17 и 10; основание другого равно 8. Определите его боковую сторону.

Ответ: 13,6.

4. В треугольниках ABC и $A_1B_1C_1$ дано: $\angle B = \angle B_1$ и стороны первого треугольника, заключающие угол B, в 2,5 раза больше сторон второго треугольника, заключающих угол B_1. Определите AC и A_1C_1, если их сумма равна 4,2.

Ответ: 3; 1,2.

5. Стороны двух подобных треугольников относятся как $3:4$, а разность их площадей равна 70. Определите площади этих треугольников.

Ответ: 90; 160.

6. Дан треугольник ABC и внутри него отрезок DE, параллельный AC (D на AB, E на BC). Определите длину DE, если $AC = 20$, $AB = 17$ и $BD = 11,9$.

Ответ: 14.

7. В треугольнике ABC проведена прямая BD так, что $\angle BDC = \angle ABC$; на стороне AC получаются отрезки $AD = 7$ и $DC = 9$. Определите сторону BC и отношение $BD : BA$.

Ответ: 12; $\frac{3}{4}$.

8. В треугольнике ABC проведена прямая BD так, что $\angle ABD = \angle BCA$. Определите отрезки AD и DC, если $AB = 2$ и $AC = 4$.

Ответ: 1; 3.

9. В трапеции $ABCD$ (где $BC \parallel AD$) с диагональю BD углы ABD и BCD равны. Дано: $BC = 10$, $DC = 15$ и $BD = 20$. Определите AB и AD.

Ответ: 30; 40.

10. В трапеции $ABCD$ с диагональю AC углы ABC и ACD равны. Определите диагональ AC, если основания BC и AD соответственно равны 12 и 27.

Ответ: 18.

11. Основания трапеции относятся, как $5:9$, а одна из боковых сторон равна 16. На сколько надо ее продолжить, чтобы она пересеклась с продолжением другой боковой стороны?

Ответ: 20.

12. В треугольник вписан параллелограмм, угол которого совпадает с углом треугольника. Стороны треугольника, заключающие этот угол, равны 20 и 25, а параллельные им стороны параллелограмма относятся, как $6:5$. Определите стороны параллелограмма.

Ответ: 10; 12.

13. В треугольниках ABC и DEF $\angle A = \angle E$ и $\angle C = \angle D$. $AB = 1{,}6$, $AC = 2$, $EF = 1{,}2$ и сторона BC больше стороны DF на 0,3. Найдите неизвестные стороны.

Ответ: 0,9; 1,2; 1,5.

14. Из точки D, лежащей на катете AC прямоугольного треугольника ABC, опущен на гипотенузу CB перпендикуляр DE. Найдите отрезок CD, если $CB = 15$, $AB = 9$ и $CE = 4$.

Ответ: 5.

15. В треугольнике ABC $AB = 9$, $BC = 15$. Из точки D, взятой на стороне AC, проведена прямая DE (точка E лежит на BC) так, что $\angle DEC = \angle A$. Найдите DE, если $DC = 10$

Ответ: 6.

16. В треугольник с основанием b и высотой h вписан квадрат так, что две его вершины лежат на основании треугольника. Определите сторону квадрата.

Ответ: $\dfrac{bh}{b+h}$.

17. В треугольнике ABC проведены высота BD и биссектриса AE и $EF \perp AC$. Вычислите EF, если $BD = 30$ и $AB : AC = 7 : 8$.

Ответ: 16.

18. В равнобедренном треугольнике ABC длина боковой стороны AB равна 7, длина основания AC равна 4. На стороне AB взята точка D так, что треугольник ACD подобен треугольнику ABC и D не совпадает с A и не совпадает с B. Найдите отношение площади треугольника ABC к площади треугольника ACD.

Ответ: $\dfrac{49}{16}$.

19. В прямоугольный треугольник вписан квадрат, имеющий с ним общий угол. Найдите площадь квадрата, если катеты треугольника равны 10 и 15.

Ответ: 36.

20. Найдите расстояние от точки пересечения медиан прямоугольного треугольника до его катета, равного 12, если гипотенуза равна 15.

Ответ: 3.

В

21. В треугольник, у которого основание равно 30, а высота 10, вписан прямоугольный равнобедренный треугольник так, что его гипотенуза параллельна основанию данного треугольника, а вершина прямого угла лежит на этом основании. Определите гипотенузу.

Ответ: 12.

22. В треугольнике ABC сторона AB равна 30, $BC = 36$ и $CA = 45$. Из вершины B проведена прямая, пересекающая сторону AC в точке D так, что $\angle ADB = \angle ABC$. Найдите периметр треугольника BCD.

Ответ: 85.

23. В треугольник вписан ромб так, что один угол у них общий, а противоположная вершина делит сторону треугольника в отношении $2:3$. Диагонали ромба равны $4\sqrt{5}$ и 8. Найдите стороны треугольника, содержащие стороны ромба.

Ответ: 10; 15.

24. Через вершину A основания AB равнобедренного треугольника ABC и середину высоты CD проведена прямая, которая пересекает боковую сторону BC треугольника в точке L. Определите отношение $CL : BL$.

Ответ: $1:2$.

25. Диагональ ромба делит его высоту, проведенную из вершины тупого угла, на отрезки длиной 10 и 6. Найдите периметр ромба.

Ответ: 80.

26. Высоты AE и CD остроугольного треугольника ABC пересекаются в точке H. Определите эти высоты, если их сумма равна 18, $AH = 8$, $CH = 4$.

Ответ: 10; 8.

27. Точка делит катет прямоугольного треугольника в отношении $1:2$, считая от вершины острого угла, и удалена от гипотенузы на 2. Длина другого катета 7. Определите площадь треугольника.

Ответ: $\frac{147\sqrt{13}}{13}$.

28. В равнобедренной трапеции $ABCD$ диагональ AC перпендикулярна боковой стороне CD и делит высоту BE на отрезки $BF = 7$ и $FE = 9$. Определите меньшее основание трапеции.

Ответ: $9\frac{1}{3}$.

29. Дан треугольник ABC, у которого $AB = 9$, $BC = 12$, $AC = 6$. На стороне AB отложен отрезок $AD = 4$, и точка D соединена отрезком прямой с вершиной C. Определите отрезок CD.

Ответ: 8.

30. BD и AE - высоты равнобедренного треугольника ABC $(AB = BC)$. Определите боковую сторону треугольника, если $BD : AE = 5 : 6$, а отрезок прямой, соединяющий точки E и D, равен 15.

Ответ: 25.

§ 2. ЧЕТЫРЕХУГОЛЬНИКИ

БЛОК 1. Решите задачи по теме «Параллелограмм»:

А

1. Найдите меньшую сторону параллелограмма, если его диагонали равны 24 и 30, а острый угол между ними равен $37°$ $(\cos 37° = 0,8)$.

Ответ: 9.

2. В параллелограмме острый угол равен $60°$. Высота параллелограмма, проведенная из вершины тупого угла, делит сторону параллелограмма пополам. Найдите меньшую диагональ параллелограмма, если его периметр равен 24.

Ответ: 6.

3. Диагонали параллелограмма равны 12 и 20, а угол между ними – $60°$. Найдите стороны параллелограмма.

Ответ: 14; $2\sqrt{19}$.

4. Две стороны параллелограмма равны 3 и 5, а одна из его диагоналей 4. Найдите расстояние между точками пересечения биссектрис острых углов параллелограмма с его меньшей диагональю.

Ответ: 1.

5. Периметр треугольника, отсекаемого от параллелограмма диагональю, равен 25, а периметр параллелограмма – 30. Найдите диагональ.

Ответ: 10.

6. Стороны параллелограмма равны 23 и 11, а диагонали относятся как $2:3$. Найдите длину большей диагонали.

Ответ: 30.

7. Найдите стороны a и b $(a \neq b)$ параллелограмма, острый угол которого $60°$, если $a:b = 5:8$, а меньшая диагональ параллелограмма равна 28.

Ответ: 20; 32.

8. Биссектрисы углов A и B параллелограмма $ABCD$ делят сторону CD на три части. Определите каждую часть, если стороны параллелограмма равны $AB = 12$; $AD = 5$.

Ответ: 5; 2; 5.

9. Площадь параллелограмма со сторонами 5 и 8 равна 32. Чему равен косинус большего угла параллелограмма?

Ответ: $-0,6$.

10. Высоты параллелограмма относятся как $3:4$. Вычислите стороны параллелограмма, если его периметр равен 42.

Ответ: 9; 12.

11. Найдите периметр параллелограмма, если его площадь равна 144, а высоты равны 8 и 12.

Ответ: 60.

12. Периметр параллелограмма равен 44. Его диагонали разбивают параллелограмм на четыре треугольника. Разность периметров двух смежных из них равна 2. Найдите длину большей стороны параллелограмма.

Ответ: 12.

13. В параллелограмме $ABCD$ $AC \perp CD$ (AC - диагональ), $CE \perp AD$, $AE = 16$, $ED = 4$. Найдите площадь параллелограмма.

Ответ: 160.

14. Меньшая сторона параллелограмма равна 13, высота, опущенная на большую сторону – 12, меньшая диагональ – 15. Найдите площадь параллелограмма.

Ответ: 168.

15. Площадь параллелограмма $ABCD$ равна S. На прямой BC взята точка M. Найдите площадь треугольника AMD.

Ответ: $\frac{1}{2}S$.

16. Прямая, перпендикулярная двум сторонам параллелограмма, делит его на две трапеции, в каждую из которых можно вписать окружность. Найдите острый угол параллелограмма, если его стороны равны 2 и 3.

Ответ: $30°$.

17. Угол параллелограмма равен $30°$. Чему равен угол между его высотами, проведенными из тупого угла?

Ответ: $30°$.

18. Точка K лежит на диагонали BD параллелограмма $ABCD$, причем $BK:KD = 1:4$. В каком отношении прямая AK делит сторону BC?

Ответ: $1:3$.

19. Через вершину B параллелограмма $ABCD$ проведена прямая, пересекающая продолжение стороны AD в точке F, а сторону CD – в точке E. Определите отрезок DF, если сторона AD равна 5, а $BE:FE = 3:2$.

Ответ: $3\frac{1}{3}$.

20. Найдите площадь параллелограмма, у которого периметр 90, а высоты 12 и 15.

Ответ: 300.

B

21. В параллелограмме даны острый угол α и расстояния a и b от точки пересечения диагоналей до неравных сторон. Определите площадь параллелограмма.

Ответ: $\frac{4ab}{\sin\alpha}$.

22. Одна из диагоналей параллелограмма служит его высотой. Определите диагонали, если периметр параллелограмма равен 50, а разность его сторон равна единице.

Ответ: 5; $\sqrt{601}$.

23. В параллелограмме один из углов равен $\frac{2\pi}{3}$. Квадрат большей диагонали равен 3. Найдите стороны параллелограмма, если его периметр равен 4.

Ответ: 1.

24. Вычислите площадь параллелограмма, если одна сторона его равна 51, а диагонали – 40 и 74.

Ответ: 1 224.

25. В ΔABC вписан параллелограмм $ADEF$, периметр которого 22. Зная, что $AB = 9$, $AC = 12$, найдите стороны параллелограмма.

Ответ: 3; 8.

26. Диагонали параллелограмма 19 и 23, его периметр $P = 58$. Вычислите стороны параллелограмма.

Ответ: 11; 18.

27. Дан параллелограмм, в котором величина острого угла равна $\frac{\pi}{3}$. Найдите отношение длин сторон параллелограмма, если отношение квадратов длин диагоналей равно $\frac{1}{3}$.

Ответ: $1:1$.

28. В параллелограмм с тупым углом $135°$ вписан круг площадью 9π. Каков периметр параллелограмма?

Ответ: $24\sqrt{2}$.

29. Диагонали параллелограмма равны 4 и $\sqrt{32}$. Они пересекаются под углом $45°$. Найдите большую высоту параллелограмма.

Ответ: 4.

30. Биссектриса угла A параллелограмма $ABCD$ пересекает сторону BC в точке K. Найдите площадь параллелограмма, если $BK = KC = 5$, $AK = 8$.

Ответ: 48.

31. Площадь параллелограмма равна 3, синус острого угла равен $\frac{3}{5}$, квадрат меньшей диагонали равен 18. Найдите периметр параллелограмма.

Ответ: 12.

32. Диагональ параллелограмма делит его угол на части $60°$ и $45°$ Найдите отношение сторон параллелограмма.

Ответ: $\sqrt{3}:\sqrt{2}$.

<u>БЛОК 2</u>. Решите задачи по теме «<u>Трапеция</u>»:

А

1. В трапеции основания равны 2 и 4, а боковые стороны равны 2. Найдите длину диагонали трапеции.

Ответ: $2\sqrt{3}$.

2. Диагонали трапеции взаимно перпендикулярны, а их длины равны 7 и 15. Найдите площадь трапеции.

Ответ: 52,5.

3. Найдите площадь трапеции, у которой боковые стороны и меньшее основание равны 8, а острый угол при основании равен $\frac{\pi}{3}$.

Ответ: $48\sqrt{3}$.

4. Площадь равнобедренной трапеции 180. Длина средней линии равна 45, длина боковой стороны равна 5. Определите длину меньшего основания трапеции.

Ответ: 42.

5. В равнобедренную трапецию, основания которой 8 и 2, вписана окружность. Найдите длину окружности.

Ответ: 4π.

6. Определите площадь равнобедренной трапеции, если её основания равны 10 и 24, а боковая сторона равна 25.

Ответ: 408.

7. В трапеции длины оснований равны 3 и 4. В каком отношении делит площадь трапеции средняя линия?

Ответ: $13:15$.

8. Трапеция описана около круга. Найдите её периметр, зная, что средняя линия ее равна 10.

Ответ: 40.

9. В равнобедренной трапеции диагональ делит острый угол пополам. Найдите среднюю линию трапеции, если её периметр равен 48, а большее основание 18.

Ответ: 14.

10. Найдите площадь прямоугольной трапеции, боковые стороны которой равны 12 и 13, а основания относятся как $4:9$.

Ответ: 78.

11. Боковые стороны и высота трапеции соответственно равны 30, 25, 24. Найдите площадь трапеции, если биссектрисы её тупых углов пересекаются на большем основании.

Ответ: 1 020.

12. Площадь равнобедренной трапеции равна $4\sqrt{3}$, меньшее основание равно 3, а угол, образованный боковой стороной с большим основанием, составляет $\frac{\pi}{3}$. Найдите большее основание.

Ответ: 5.

13. Около окружности описана равнобедренная трапеция, длины оснований которой равны 3 и 6. Найдите квадрат радиуса окружности.

Ответ: 4,5.

14. В равнобедренной трапеции диагональ, равная $8\sqrt{3}$, составляет с основанием угол $30°$. Чему равна средняя линия трапеции?

Ответ: 12.

15. Найдите периметр трапеции $ABCD$, если периметр треугольника ABE, где $BE \parallel CD$, равен 36 и меньшее основание трапеции равно 6.

Ответ: 48.

16. Меньшее основание равнобедренной трапеции равно 6, большее – 12, угол при основании - $60°$. Найдите радиус описанной около трапеции окружности.

Ответ: 6.

17. Боковая сторона равнобедренной трапеции равна $\sqrt{13}$, а основания равны 3 и 4. Найдите диагональ трапеции.

Ответ: 5.

18. Найдите площадь равнобедренной трапеции, описанной около окружности с радиусом 4, если известно, что боковая сторона трапеции равна 10.

Ответ: 80.

19. В прямоугольной трапеции большее основание равно 25, а угол при нем равен 53°. Меньшая диагональ перпендикулярна боковой стороне. Найдите меньшее основание трапеции, если $\sin 53° = 0{,}8$.

Ответ: 16.

20. В трапеции $ABCD$ с основаниями $AD = 7$; $BC = 4$ площадь треугольника ABD равна 28. Найдите площадь треугольника ABC.

Ответ: 16.

21. В равнобедренную трапецию с боковой стороной, равной 9, вписана окружность радиуса 4. Найдите площадь трапеции.

Ответ: 72.

В

22. Около окружности описана равнобедренная трапеция с основаниями 4 и 12. Определите длину хорды, соединяющей точки касания окружности с боковыми сторонами.

Ответ: 6.

23. Периметр равнобедренной трапеции равен 71,8. Средняя линия трапеции равна 21,4, а биссектриса большего угла параллельна боковой стороне. Найдите длину меньшего основания.

Ответ: 14,15.

24. Площадь равнобедренной трапеции, описанной около круга, равна 162. Определите длину боковой стороны трапеции, если острый угол при ее основании равен $30°$.

Ответ: 18.

25. Площадь равнобедренной трапеции, в которую можно вписать окружность, равна 2. Определите стороны трапеции, если угол при основании равен $30°$.

Ответ: $2+\sqrt{3}$; 2; $2-\sqrt{3}$

26. Найдите площадь трапеции, у которой параллельные стороны 60 и 20, а непараллельные – 13 и 37.

Ответ: 480.

27. Площадь равнобедренной трапеции равна S, угол между её диагоналями, противолежащий боковой стороне, равен α. Найдите высоту трапеции.

Ответ: $\sqrt{S \cdot \operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}}$

28. Расстояние от центра окружности, вписанной в равнобедренную трапецию, до вершины верхнего основания равно 15, а до вершины нижнего основания 20. Чему равна площадь этой трапеции?

Ответ: 600.

29. Средняя линия трапеции $ABCD$ делит ее на две трапеции с средними линиями 13 и 17. Найдите большее основание трапеции $ABCD$.

Ответ: 19.

30. Дана трапеция $ABCD$ $(AB \parallel DC)$. Найдите косинус угла C, если $AB = 6$, $BC = 3$, $CD = 4$ и $DA = 2$.

Ответ: $-\frac{3}{4}$.

31. Диагонали трапеции $ABCD$ с основаниями BC и AD пересекаются в точке O. Найдите площадь этой трапеции, если $BO = 2$, $DO = 4$ и площадь треугольника BOC равна 6.

Ответ: 54.

32. Основания трапеции равны 8 и 12, а один из острых углов $30°$. Продолжения боковых сторон пересекаются под углом в $90°$. Найдите высоту трапеции.

Ответ: $\sqrt{3}$

33. Окружность, вписанная в равнобедренную трапецию, точкой касания делит боковую сторону в отношении $1:9$. Длина этой окружности равна 6π. Чему равен периметр трапеции?

Ответ: 40.

34. Основания трапеции равны 10 и 31, а боковые стороны – 20 и 13. Найдите высоту трапеции.

Ответ: 12.

35. Меньшее основание равнобедренной трапеции равно 10, боковая сторона 18, а диагональ 22. Найдите большее основание трапеции.

Ответ: 16.

36. Площадь равнобедренной трапеции с острым углом в $53°$ равна 5 120. Найдите радиус окружности, вписанной в эту трапецию, если $\sin 53° = 0{,}8$.

Ответ: 32.

37. Диагональ равнобедренной трапеции перпендикулярна ее боковой стороне. Определите площадь трапеции, если ее диагональ и боковая сторона соответственно равны $\sqrt{75}$ и 5.

Ответ: $\dfrac{75\sqrt{3}}{4}$.

38. Большее основание равнобедренной трапеции в три раза больше меньшего основания. Площадь трапеции равна $\sqrt{3}$. Найдите ее боковую сторону, если трапеция описана около окружности.

Ответ: $\sqrt{2}$.

39. В трапеции длины оснований равны 5 и 15, а длины диагоналей 12 и 16. Найдите площадь трапеции.

Ответ: 96.

40. В прямоугольную трапецию вписана окружность радиуса 3. Меньшее основание трапеции равно 4. Найдите остальные стороны трапеции.

Ответ: 6; 10; 12.

41. В трапеции длина средней линии равна 4, углы при одном из оснований $40°$ и $50°$, длина отрезка, соединяющего середины оснований, равна 1. Найдите длины оснований трапеции.

Ответ: 3; 5.

42. Биссектрисы тупых углов при основании трапеции пересекаются на другом ее основании. Найдите все стороны трапеции, если ее высота равна 12, а биссектрисы равны 15 и 13.

Ответ: 14; 12,5; 29,4; 16,9.

БЛОК 3. Решите задачи по теме «Прямоугольник»:

А

1. Стороны прямоугольника относятся как $3:4$, а его диагональ равна 50. Найдите периметр прямоугольника.

Ответ: 140.

2. Диагональ квадрата равна 26. Найдите периметр четырехугольника, вершинами которого являются середины сторон квадрата.

Ответ: 52.

3. Стороны прямоугольника 5 и 4. Биссектрисы углов, прилежащих к большей стороне, делят противолежащую сторону на три части. Найдите длины этих частей.

Ответ: 1; 1; 3.

4. Найдите сторону квадрата, вписанного в прямоугольный треугольник с катетами 3 и 6, и имеющего с данным треугольником общий прямой угол.

Ответ: 2.

5. Площадь круга, описанного около квадрата, равна 8π. Найдите площадь квадрата.

Ответ: 16.

6. Дан квадрат, сторона которого равна 1. Диагональ его служит стороной другого квадрата. Найдите диагональ последнего.

Ответ: 2.

7. Если увеличить длину основания прямоугольника на 50%, а высоту уменьшить на 50%, то, на сколько процентов измениться его площадь?

Ответ: уменьшится на 25%.

8. Определите площадь квадрата, вписанного в окружность радиуса R.

Ответ: $2R^2$.

9. Две окружности радиуса r вписаны в прямоугольник так, что они касаются друг друга и каждая касается трех сторон прямоугольника. Найдите площадь прямоугольника.

Ответ: $8r^2$

10. Вычислите отношение площади квадрата к площади вписанного в него круга.

Ответ: $\frac{4}{\pi}$.

11. В прямоугольнике $ABCD$ AE и CF – перпендикуляры, опущенные из вершин A и C на диагональ BD. Угол между диагоналями равен $30°$, $CF = 2$. Найдите отрезок EF.

Ответ: $4\sqrt{3}$.

12. Из вершины C квадрата $ABCD$ со стороной, равной 4, проведена прямая, которая пересекает сторону AD в точке K. Определите высоту BM треугольника BKC, если отрезок KC равен 5.

Ответ: 3,2.

13. Через вершину A квадрата $ABCD$, сторона которого равна 4, проведена прямая, пересекающая сторону CD в точке E, а продолжение стороны BC – в точке M. Определите отрезок MC, если $DE:CE = 3:2$.

Ответ: $2\frac{2}{3}$.

14. Стороны прямоугольника, равные 8 и 15, спроектированы на его диагональ. Вычислите полученные проекции.

Ответ: $3\frac{13}{17}$; $13\frac{4}{17}$.

15. Периметр прямоугольника равен 28, а площадь его – 48. Найдите длину окружности, описанной около прямоугольника.

Ответ: 10π.

16. Прямоугольник разделен своими диагоналями на четыре треугольника. Площадь одного из них равна 27. Чему равна площадь прямоугольника?

Ответ: 108.

17. В квадрат вписан четырехугольник, вершины которого совпадают с серединами сторон квадрата. Площадь вписанного четырехугольника равна 36. Чему равна площадь квадрата?

Ответ: 72.

18. Стороны прямоугольника равны 3 и 1; в нем проведены все биссектрисы до взаимного пересечения. Найдите площадь образованного ими четырехугольника.

Ответ: 2.

19. В прямоугольнике $ABCD$ сторона AB равна 24, диагональ равна 25. Точка K лежит на стороне AB на расстоянии 14 от вершины A. Найдите расстояние от точки K до диагонали BD

Ответ: 2,8.

В

20. Окружность касается двух смежных сторон квадрата и делит каждую из оставшихся сторон на отрезки, равные 2 и 23. Найдите радиус окружности.

Ответ: 17.

21. Из точки M, взятой на стороне BC прямоугольника $ABCD$, стороны AB и AD видны под равными углами. На какие части точка M делит сторону BC, если $AB = 80$, а $AD = 89$?

Ответ: 39; 50.

22. Окружность радиуса 13 касается двух смежных сторон квадрата со стороной 18. На какие два отрезка делит окружность каждую из двух других сторон квадрата?

Ответ: 1; 17.

23. Перпендикуляр, опущенный из вершины угла A прямоугольника $ABCD$ на не проходящую через эту вершину диагональ, делит ее в отношении $1:3$, считая от вершины B. Диагональ равна 6. Найдите расстояние от точки перессечения диагоналей до большей стороны.

Ответ: 1,5.

24. Диагональ прямоугольника делит его угол в отношении $1:2$. Определите диагональ прямоугольника, если сумма обеих диагоналей и меньших сторон равна 24.

Ответ: 8.

25. Периметр прямоугольника равен 32, а площадь его равна 48. Найдите синус угла между его диагоналями.

Ответ: $\frac{3}{5}$.

26. Площадь прямоугольника относится к площади квадрата, сторона которого равна диагонали прямоугольника, как $\sqrt{3}:4$. Найдите угол между диагоналями прямоугольника.

Ответ: $60°$.

27. Перпендикуляры, опущенные из двух вершин прямоугольника на его диагональ, делят ее на три равные части. Меньшая сторона прямоугольника равна a. Найдите большую сторону.

Ответ: $\sqrt{2}a$.

28. В прямоугольнике диагонали пересекаются под углом $30°$, а площадь описанного круга равна 144π. Найдите площадь прямоугольника.

Ответ: 144.

29. В прямоугольнике $ABCD$ точка K делит сторону AB в отношении $AK:KB=3:4$, а точка M делит сторону CD в отношении $DM:MC=5:3$. В каком отношении отрезок KM делит площадь прямоугольника?

Ответ: $\frac{53}{59}$.

30. Периметр прямоугольника равен 46. Биссектриса прямого угла делит диагональ в отношении $8:15$. Найдите длину окружности, описанной около прямоугольника.

Ответ: 17π.

БЛОК 4. Решите задачи по теме «Ромб»:

А

1. В ромбе со стороной 12 и углом $\frac{\pi}{3}$ при вершине проведена меньшая диагональ. В один из полученных треугольников вписана окружность. Найдите ее радиус.

Ответ: $2\sqrt{3}$.

2. Диагонали ромба a и b Найдите высоту ромба.

Ответ: $\frac{ab}{\sqrt{a^2+b^2}}$.

3. Диагонали ромба относятся, как $2:1$, а площадь равна 5. Найдите сторону ромба.

Ответ: 2,5.

4. Острый угол ромба равен $30°$. Радиус вписанной в ромб окружности равен 3. Найдите площадь ромба.

Ответ: 72.

5. Площадь ромба 3 360. Одна из его диагоналей равна 84. Найдите сторону ромба.

Ответ: 58.

6. Один из углов ромба равен $120°$, а диагональ, исходящая из вершины этого угла, равна 10. Найдите периметр ромба.

Ответ: 40.

7. Один из углов ромба равен $120°$. Точка пересечения диагоналей ромба удалена от стороны ромба на $2\sqrt{3}$. Найдите периметр ромба.

Ответ: 32.

8. В ромбе с площадью 98 один из углов равен $150°$. Найдите периметр ромба.

Ответ: 56.

9. Найдите углы ромба, периметр которого равен 24, а площадь – 18.

Ответ: $30°$ и $150°$.

10. Точка касания окружности, вписанной в ромб, делит его сторону на отрезки 9 и 16. Найдите его диагонали.

Ответ: 30; 40.

11. В ромбе высота равна $\sqrt{3}$. Найдите диагонали ромба, если одна из них равна стороне ромба.

Ответ: 2; $2\sqrt{3}$.

12. Радиус окружности, вписанной в ромб, равен 5. Периметр ромба равен 80. Вычислите острый угол ромба.

Ответ: $30°$.

13. Периметр ромба равен 112, один из его углов равен $45°$. Вычислите радиус вписанной в этот ромб окружности.

Ответ: $7\sqrt{2}$.

14. В ромбе $ABCD$ высота равна h, а $\angle ABC = 120°$. На стороне BC взята точка M. Найдите площадь треугольника AMD.

Ответ: $\frac{h^2\sqrt{3}}{3}$.

15. Радиус окружности, вписанной в ромб со стороной 4, равен 1. Найдите синус острого угла ромба.

Ответ: $\frac{1}{2}$.

16. Периметр ромба равен 24. Одна из диагоналей ромба составляет со стороной ромба угол в $75°$. Найдите расстояние между противоположными сторонами ромба.

Ответ: 3.

17. В ромб с острым углом в $30°$ вписан круг. Найдите отношение площади круга к площади ромба.

Ответ: $\frac{\pi}{8}$.

18. Периметр ромба равен 52, а сумма его диагоналей равна 34. Найдите площадь ромба.

Ответ: 120.

19. Сторона ромба равна 5 и одна из диагоналей 6 Найдите площадь ромба.

Ответ: 24.

20. Около круга описан ромб с острым углом $37°$. Сторона ромба равна 50. Найдите диаметр круга, если $\sin 37° = 0,6$.

Ответ: 30.

21. Найдите периметр ромба, зная, что длина его большей диагонали равна 10, а радиус вписанной окружности равен 3.

Ответ: 25.

22. Площадь ромба вдвое меньше площади квадрата, имеющего такой же периметр. Найдите углы ромба.

Ответ: $30°$; $150°$.

23. Найдите площадь ромба, угол которого α; диагональ, проведенная из вершины этого угла, равна d.

Ответ: $\frac{d^2}{2}\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}$.

В

24. Найдите площадь ромба $ABCD$, если тангенс острого угла ABC равен $\sqrt{15}$ и $AC = 4$.

Ответ: $\frac{8\sqrt{15}}{3}$.

25. Диагональ ромба делит его высоту, проведенную из вершины тупого угла на отрезки длиной 10 и 6. Найдите периметр ромба.

Ответ: 80.

26. Радиус окружности, вписанной в ромб с площадью 2 400, равен 24. Найдите диагонали ромба.

Ответ: 60; 80.

27. В ромбе $ABCD$, диагонали которого 15 и 20, из вершины C тупого угла проведены две высоты: CE и CF. Вычислите площадь четырехугольника $AECF$.

Ответ: 108.

28. Диагонали ромба относятся как $3:4$. Определите отношение площади ромба к площади круга, вписанного в ромб.

Ответ: $\frac{25}{6\pi}$.

29. В пересечении двух равных кругов вписан ромб с диагоналями 12 и 6. Найдите радиус окружностей.

Ответ: 7,5.

30. Определите сторону ромба, если его площадь равна 24, а отношение диагоналей – 0,75.

Ответ: 5.

31. В ромб вписан круг, а в круг вписан квадрат. Чему равен угол ромба, если площадь квадрата в 4 раза меньше площади ромба?

Ответ: $30°$.

32. В ромбе $ABCD$ угол при вершине A равен $\frac{\pi}{3}$. Точка N делит сторону AB в отношении $AN:BN=2:1$. Определите тангенс угла DNC

Ответ: $\frac{9\sqrt{3}}{11}$.

§ 3. ОКРУЖНОСТЬ И КРУГ

БЛОК 1. Решите задачи по теме «Окружность и круг»:

А

1. Две окружности радиусов 3 и 5 касаются друг друга внешним образом. Проведены две общие внешние касательные. Найдите расстояние от точки пересечения этих касательных до центра большей окружности.

Ответ: 20.

2. В окружности радиуса 10 проведена хорда AB, которая отсекает дугу с центральным углом 2α. Через середину хорды проведен радиус OC. Найдите длину отрезка CD (где D – точка пересечения хорды и радиуса OC), если $\cos\alpha = 0{,}8$.

Ответ: 2.

3. Центры четырёх касающихся окружностей радиуса 1 расположены в вершинах квадрата. Определите радиус описанной около них и касающейся их окружности.

Ответ: $\sqrt{2}+1$.

4. Из точки окружности проведены диаметр и хорда длиной 30. Проекция хорды на диаметр относится к радиусу окружности как $18:25$. Найдите радиус окружности.

Ответ: 25.

5. В окружности проведены две пересекающиеся хорды. Одна из них делится на отрезки 2 и 6, а длина другой хорды равна 7. Найдите отрезки второй хорды.

Ответ: 3; 4.

6. Две окружности, радиусы которых равны 20 и 5, касаются внешним образом и имеют общую касательную. Найдите расстояние между точками касания.

Ответ: 20.

7. Точка A лежит вне круга на расстоянии диаметра от центра круга. Определите угол между касательными, проведенными из точки A к данной окружности.

Ответ: $60°$.

8. В окружности перпендикулярно диаметру AB проведена хорда CD. Точка их пересечения делит диаметр на отрезки 18 и 32. Найдите длину хорды CD.

Ответ: 48.

9. Через концы хорды AB, равной радиусу окружности, проведены две касательные, пересекающиеся в точке D. Найдите угол ADB.

Ответ: $120°$.

10. Хорда PK делится точкой M на два отрезка $PM = 7$, $MK = 8$. Найдите расстояние от точки M до центра окружности, если её радиус равен 9.

Ответ: 5.

11. Вершины некоторого треугольника делят полную дугу описанной около него окружности в отношении $1:2:3$. Наименьшая из сторон этого треугольника равна $\sqrt{6}$. Найдите его площадь.

Ответ: $3\sqrt{3}$.

12. Две равные окружности расположены так, что каждая из них проходит через центр другой. Под каким углом видна их общая хорда из центра каждой окружности?

Ответ: $120°$.

13. Хорда, равная $6\sqrt{3}$, стягивает дугу в $120°$. Чему равна длина окружности, в которой проведена эта хорда?

Ответ: 12π.

14. AB - диаметр круга; BC - отрезок касательной; D - точка пересечения прямой AC с окружностью. Дано: $AD = 32$; $DC = 18$. Определите площадь круга.

Ответ: 400π.

15. Касательная и секущая, выходящие из одной точки, соответственно равны 20 и 40. Секущая удалена от центра на 8. Найдите площадь круга.

Ответ: 289π.

16. Точки A, B, C лежат на окружности. Биссектриса угла BAC пересекает эту окружность в точке M. Найдите углы треугольника BMC, если известно, что $\angle BAC = 80°$.

Ответ: $100°$; $40°$; $40°$.

17. Окружности, центры которых расположены по разные стороны от некоторой прямой, касаются этой прямой. Линия центров пересекает прямую под углом, равным $30°$. Найдите расстояние между центрами окружностей, если их радиусы равны 3 и 5.

Ответ: 16.

18. Найдите площадь кольца, ограниченного окружностью, описанной около квадрата и вписанной в него. Сторона квадрата равна 20.

Ответ: 100π.

19. Радиус круга равен 25; две параллельные хорды, лежащие по одну сторону от диаметра, - 14 и 40. Определите расстояние между ними.

Ответ: 9.

20. Расстояния от одного конца диаметра круга до концов параллельной ему хорды равны 13 и 84. Найдите диаметр круга.

Ответ: 85.

21. В угол $\alpha = 60°$ вписана окружность радиуса $r = 6$, A и B точки ее касания со сторонами угла. Найдите длину отрезка AB.

Ответ: $6\sqrt{3}$.

22. Из точки A проведена касательная AB к окружности с центром O, точка B лежит на окружности, $AB = 12$. Через точку A проведена также прямая, проходящая через точку O, пересекающая окружность в точках C и D, точка C лежит между A и D, $AC = 4$. Найдите диаметр окружности.

Ответ: 32.

23. Концы диаметра отстоят от касательной на 1 и 3. Найдите диаметр окружности.

Ответ: 4.

24. Точка M лежит на хорде AB так, что $AM : BM = 4 : 3$, $AB = 14$. Расстояние от центра окружности до точки M равно 4. Найдите радиус окружности.

Ответ: 8.

25. Радиус одной из двух касающихся окружностей равен 1, а длина их общей касательной равна 4. Найдите радиус второй окружности.

Ответ: 4.

26. В окружности по разные стороны от центра проведены параллельные хорды длиной 12 и 16. Расстояние между ними равно 14. Найдите радиус окружности.

Ответ: 10.

27. Диаметр CD параллелен хорде AB той же окружности. Найдите длину этой хорды, если $AC = 3$, $BC = 4$.

Ответ: 1,4.

28. Радиус окружности равен r. Из точки M через центр окружности проведена секущая MB и касательная MA, причем $MB = 2MA$. Найдите, на каком расстоянии от центра окружности находится точка M.

Ответ: $\frac{5}{3}r$.

29. Из внешней точки к окружности проведены две касательные, и в фигуру, ограниченную дугой окружности и касательными, вписана вторая окружность. Расстояния от данной точки до центров окружностей равны 6 и 18. Найдите радиусы окружностей.

Ответ: 3; 9.

30. Две окружности внешне касаются; отношение радиусов равно 2; отрезок их внешней касательной, заключенный между точками касания, равен a. Найдите радиусы этих окружностей.

Ответ: $\frac{a\sqrt{2}}{4}$; $\frac{a\sqrt{2}}{2}$.

31. Дана окружность радиуса $R = 5\sqrt{3}$. Из одного конца диаметра проведена касательная, а из другого – хорда, стягивающая дугу в $120°$; хорда продолжена до пересечения с касательной. Определите внешний отрезок секущей.

Ответ: 5.

32. Каждая из двух окружностей проходит через центр другой. Определите угол между касательными к этим окружностям в их точке пересечения.

Ответ: $120°$.

33. Радиус окружности равен 8, хорда $AB = 12$. В точке A проведена касательная, а из точки B – хорда BD, параллельная касательной. Определите расстояние между касательной и хордой BD.

Ответ: 9.

34. Хорда окружности равна 10. Через один конец хорды проведена касательная к окружности, а через другой – секущая, параллельная касательной. Определите радиус окружности, если внутренний отрезок секущей равен 12.

Ответ: 6,25.

35. Около треугольника ABC описана окружность. Медиана треугольника AM продлена до пересечения с окружностью в точке K. Найдите сторону AC, если $AM = 18$, $MK = 8$, $BK = 10$.

Ответ: 15.

36. Через концы хорды, длина которой равна 30, проведены две касательные до пересечения в точке A. Найдите расстояние от точки A до хорды, если радиус окружности равен 17.

Ответ: $\frac{225}{8}$.

37. Из одной точки проведены к окружности две касательные. Длина каждой касательной равна 13, а расстояние между точками касания равно 24. Найдите радиус окружности.

Ответ: 31,2.

38. Перпендикуляр, опущенный из точки окружности на диаметр, делит его на отрезки, разность которых 18. Длина перпендикуляра равна 12. Найдите диаметр.

Ответ: 30.

39. В четырехугольнике $ABCD$ известно, что $\angle CBD = 58°$, $\angle ABD = 44°$, $\angle ADC = 78°$. Найдите угол CAD.

Ответ: $58°$.

40. На стороне AB треугольника ABC, как на диаметре, построен круг, который пересекает стороны BC и AC в точках M и N соответственно. Угол BCA равен $60°$. Какую часть площади треугольника ABC составляет площадь четырехугольника $ABMN$?

Ответ: $\frac{3}{4}$.

41. На стороне AB треугольника ABC, как на диаметре, построен круг, который пересекает стороны AC и BC в точках D и E соответственно. Найдите угол CBD, если площади треугольников DCE и ABC относятся как $1:4$.

Ответ: $30°$.

42. Полукруг, построенный на боковой стороне AB равнобедренного треугольника ABC $(AB = BC)$, как на диаметре, пересекает другую боковую сторону в точке K, а основание – в точке D. Длина DC равна 3, а высота, проведенная к боковой стороне - $4\sqrt{2}$. Найдите, какую часть площади треугольника ABC составляет площадь треугольника BAK.

Ответ: $\frac{7}{9}$.

ГЛАВА IX. СТЕРЕОМЕТРИЯ

§ 1. ВЫЧИСЛЕНИЕ РАССТОЯНИЙ И УГЛОВ В ПРОСТРАНСТВЕ

БЛОК 1. Решите задачи по теме «Перпендикуляр и наклонная»:

А

1. Из центра круга, описанного около прямоугольного треугольника с острым углом в $30°$, восстановлен к его плоскости перпендикуляр, длина которого 6. Конец перпендикуляра, лежащий вне плоскости треугольника, удален от большего катета на 10. Найдите гипотенузу треугольника.

Ответ: 32.

2. Катеты прямоугольного треугольника ABC равны 15 и 20. Из вершины прямого угла C проведен к плоскости этого треугольника перпендикуляр $CD = 35$. Найдите расстояние от точки D до гипотенузы AB.

Ответ: 37.

3. Из центра круга проведен перпендикуляр OD к его плоскости. Определите расстояние от конца D этого перпендикуляра до точек окружности, если длина перпендикуляра равна a, а площадь круга равна S.

Ответ: $\sqrt{\frac{S}{\pi}+a^2}$.

4. Дана плоскость: из некоторой точки пространства проведены к этой плоскости две наклонные длиной 20 и 15; проекция первой из них на плоскость равна 16. Найдите проекцию второй наклонной.

Ответ: 9.

5. Из некоторой точки пространства проведены к данной плоскости перпендикуляр, равный 6, и наклонная длиной 9 Найдите проекцию перпендикуляра на наклонную.

Ответ: 4.

6. Сторона равностороннего треугольника равна 3. Определите расстояние от его плоскости до точки, которая отстоит от каждой из его вершин на 2.

Ответ: 1.

7. Из данной точки проведены к данной плоскости две наклонные, равные каждая 2; угол между ними равен $60°$, а угол между их проекциями – прямой. Найдите расстояние от данной точки до плоскости.

Ответ: $\sqrt{2}$.

8. Четырехугольник $ABCD$ – квадрат, точка O – его центр. Прямая OM перпендикулярна к плоскости квадрата. Найдите MA, если $AB = 4$, $OM = 1$.

Ответ: 3.

9. В равнобедренном треугольнике ABC боковая сторона равна 15, а основание $AC = 6$. Из точки O центра вписанного в него круга проведен к плоскости треугольника перпендикуляр OK, равный 2. Найдите расстояния от точки K до сторон треугольника.

Ответ: $\sqrt{10}$.

10. Точка S, не лежащая в плоскости ромба $ABCD$, равноудалена от его вершин. Найдите площадь $ABCD$, если $BD = 8$.

Ответ: 32.

11. Из точки S проведена к плоскости α наклонная SB, проекцией которой на плоскость α является отрезок AB. Вычислите AB, если $SA = 5$, $SB = 13$.

Ответ: 12.

12. В равнобедренном треугольнике ABC основание BC равно 12, боковая сторона – 10. Из вершины A проведен отрезок $AD = 6$, перпендикулярный плоскости треугольника ABC. Найдите расстояние от точки D до стороны BC.

Ответ: 10.

13. Из точки к плоскости проведены две наклонные длиной 4 и 8. Найдите расстояние от точки до плоскости, если их проекции относятся как $1:7$.

Ответ: $\sqrt{15}$.

14. Из вершины прямого угла прямоугольного треугольника к его плоскости восстановлен перпендикуляр длиной 5. Вершина этого перпендикуляра находится на расстоянии 9 и 13 от концов гипотенузы. Определите гипотенузу треугольника.

Ответ: $10\sqrt{2}$.

15. Из вершины прямого угла прямоугольного треугольника ABC восстановлен к плоскости этого треугольника перпендикуляр CM. Найдите гипотенузу AB, если $CM = 1$, $AM = BM = 3$.

Ответ: 4.

16. Расстояния двух точек от плоскости равны 8 и 23; расстояние между основаниями перпендикуляров, опущенных из данных точек на эту плоскость, равно 20. Вычислите расстояние между заданными точками (точки лежат по одну сторону от плоскости).

Ответ: 25.

17. Длина отрезка AB равна 15, проекция этого отрезка на плоскость – 12. Нижний конец A этого отрезка отстоит от плоскости на расстоянии 16. На каком расстоянии от плоскости находится верхний конец B данного отрезка? (отрезок AB не пересекает плоскость)

Ответ: 25.

18. На отрезке AB выбрана точка C, которая делит отрезок так, что $AC : CB = 3 : 5$. Найдите расстояние от точки C до плоскости, которая удалена от точки A на 12, а от точки B на 28. (отрезок AB не пересекает плоскость)

Ответ: 18.

19. Дан ромб со стороной 6 и углом $60°$. Точка M находится на расстоянии 3 от плоскости ромба и на одинаковом расстоянии от прямых, содержащих его стороны. Найдите это расстояние.

Ответ: $\frac{3\sqrt{7}}{2}$.

20. Точка A взята на расстоянии 5 от плоскости α. Прямая BC, лежащая на плоскости α, удалена от проекции точки A на эту плоскость на 12. Определите расстояние от прямой BC до точки A.

Ответ: 13.

21. Точка удалена от всех вершин прямоугольного треугольника на 6,5. Найдите расстояние этой точки от плоскости треугольника, если катеты его равны 3 и 4.

Ответ: 6.

22. Катеты прямоугольного треугольника равны 6 и 8. Точка M удалена от каждой из сторон треугольника на 2,5. Найдите расстояние от точки M до плоскости треугольника.

Ответ: 1,5.

В

23. Площадь равнобедренного треугольника с основанием 48 равна 768. На расстоянии 60 от плоскости треугольника выбрана точка, находящаяся на одинаковом расстоянии от вершин треугольника. Найдите это расстояние.

Ответ: 65.

24. Из вершины A треугольника ABC проведен отрезок AK, перпендикулярный плоскости треугольника. Найдите площадь треугольника BCK, если $AC = AB = 13$, $BC = 10$, $AK = 16$.

Ответ: 100.

25. В равнобедренном треугольнике основание и высота содержат по 4. Данная точка находится на расстоянии 6 от плоскости треугольника и на равном расстоянии от его вершин. Найдите это расстояние.

Ответ: 6,5.

26. В треугольнике ABC $AC = BC = 10$, $\angle B = 30°$. Прямая BD перпендикулярна плоскости треугольника, $BD = 5$. Найдите расстояние от точки D до прямой AC.

Ответ: 10.

27. Стороны треугольника: 10; 17 и 21. Из вершины большего угла этого треугольника проведен перпендикуляр к его плоскости, равный 15. Определите расстояние от его концов до большей стороны.

Ответ: 8; 17.

28. В треугольнике ABC угол C прямой; CD – перпендикуляр к плоскости этого треугольника. Точка D соединена с A и B. Определите площадь треугольника ADB, если дано: $CA = 3$, $BC = 2$, $CD = 1$.

Ответ: 3,5.

29. Из вершины A прямоугольника $ABCD$ проведен к его плоскости перпендикулярный отрезок AK, конец которого K отстоит от других вершин на расстоянии 6; 7 и 9. Найдите длину AK.

Ответ: 2.

30. Через вершину прямого угла C прямоугольного треугольника ABC параллельно гипотенузе на расстоянии 10 от нее проведена плоскость. Проекции катетов на эту плоскость равны 30 и 50. Найдите проекцию гипотенузы на эту же плоскость.

Ответ: 60.

31. Дан равнобедренный треугольник ABC с основанием $AC = 18$ и боковой стороной, равной 15. Из центра O вписанной окружности восстановлен к плоскости этого треугольника перпендикуляр $OK = 6$. Найдите расстояние между точкой K и сторонами треугольника.

Ответ: 7,5.

32. Из вершины A прямоугольника $ABCD$ к его плоскости проведен перпендикуляр AE. Определите длину этого перпендикуляра, если EB, EC и ED соответственно равны 15, 24 и 20.

Ответ: 7.

33. Основания равнобедренной трапеции соответственно равны 4 и 9. Вне плоскости трапеции, на расстоянии 5 от каждой ее стороны, взята точка M. Определите, на каком расстоянии от плоскости трапеции находится точка M.

Ответ: 4.

34. Из середины стороны ромба проведен перпендикуляр к его плоскости, верхний конец его удален от большей диагонали ромба, длиной 16, на расстояние, равное половине стороны ромба. Определите длину этого перпендикуляра.

Ответ: 4.

35. В прямоугольном треугольнике ABC угол A равен $30°$, а гипотенуза 8. Из вершины A проведен перпендикуляр AK к плоскости треугольника длиной 1. Определите расстояние от точки K до противолежащего перпендикуляру катета.

Ответ: 7.

36. В равнобедренном треугольнике основание и высота равны 8. Данная точка удалена от плоскости треугольника на 12 и равноудалена от его вершин. Найдите это расстояние.

Ответ: 13.

37. В параллелограмме $ABCD$ вершины A и D лежат на данной плоскости, а две другие - вне этой плоскости. Известно, что $AB = 15$, $BC = 19$, а проекции диагоналей параллелограмма на плоскость равны 20 и 22. Определите проекции сторон параллелограмма на эту плоскость.

Ответ: 9; 19.

38. В треугольнике ABC известно, что $AB = 13$, $BC = 14$, $AC = 15$. Из вершины A проведен к его плоскости перпендикуляр AD, равный 5. Найдите расстояние от точки D до прямой BC.

Ответ: 13.

39. Основания трапеции равны 28 и 36. Точка пересечения диагоналей трапеции отстоит от плоскости, проведенной через меньшее основание, на 14. Определите расстояние от большего основания трапеции до данной плоскости.

Ответ: 32.

40. Из точки A, взятой на окружности радиуса 2, восстановлен к плоскости круга перпендикуляр AK длиной 1. Из точки A проведен диаметр AB, а из точки B под углом $45°$ к диаметру – хорда BC. Определите расстояние от точки K до хорды BC

Ответ: 3.

БЛОК 2. Задачи по теме «Вычисление углов в пространстве»:

А

1. Отрезок длиной 10 пересекает плоскость, причем концы его находятся на расстоянии 3 и 2 от плоскости. Найдите угол между данным отрезком и плоскостью.

Ответ: $30°$.

2. Через вершину A к плоскости квадрата $ABCD$ проведен перпендикуляр MA. Угол между прямой MC и плоскостью квадрата равен $45°$, а $MA = 4\sqrt{2}$. Найдите площадь квадрата.

Ответ: 16.

3. Из точки, отстоящей от плоскости на расстоянии a, проведены две наклонные, образующие с плоскостью углы в $45°$, а между собой угол в $60°$. Определите расстояние между концами наклонных.

Ответ: $a\sqrt{2}$.

4. Плоскость α проходит через сторону AD треугольника ABD. Сторона AB образует с плоскостью α угол $30°$. Найдите синус угла между плоскостями α и ABD, если $AD = 3$, $AB = 5$, $BD = 4$.

Ответ: $\frac{5}{8}$.

5. Плоскость α проходит через сторону AD квадрата $ABCD$. Диагональ BD образует с плоскостью α угол $45°$. Найдите угол между плоскостью квадрата и плоскостью α.

Ответ: $90°$.

6. Через основание BC равнобедренного треугольника ABC проведена плоскость α; расстояние от вершины A до этой плоскости равно 4. Найдите угол между плоскостью α и плоскостью треугольника, если $BC = 12$, $AB = AC = 10$.

Ответ: $30°$.

7. Двугранный угол, образованный полуплоскостями α и β, равен $90°$. Точка A удалена от граней двугранного угла на 8 и 6. Найдите расстояние от точки A до ребра двугранного угла.

Ответ: 10.

8. Дана плоскость α и не пересекающий ее отрезок $AB = 13$. Определите синус угла наклона прямой, содержащей AB, к плоскости α, если расстояния от концов отрезка до плоскости равны 5 и 8.

Ответ: $\frac{3}{13}$.

9. Сторона BC треугольника ABC равна 5 и лежит в плоскости α, а вершина A удалена от плоскости α на 6. Найдите площадь треугольника ABC, если его плоскость наклонена к плоскости α под углом $60°$.

Ответ: $10\sqrt{3}$.

10. Из точки, отстоящей от данной плоскости на расстоянии 30, проведена прямая, составляющая с этой плоскостью угол в $60°$. Вычислите длину наклонной и ее проекцию на эту плоскость.

Ответ: $20\sqrt{3}$; $10\sqrt{3}$.

11. Стороны треугольника равны 50; 58; 12. Найдите площадь его проекции на плоскость, составляющей с его плоскостью угол $60°$.

Ответ: 120.

12. Катеты прямоугольного треугольника равны 3 и 6, угол между плоскостями треугольника и проекции равен $60°$. Найдите площадь проекции.

Ответ: 4,5.

В

13. Плоскость α проходит через сторону AD квадрата $ABCD$ и образует со стороной AB угол, синус которого равен $\frac{\sqrt{6}}{4}$. Найдите угол, который образует с этой плоскостью диагональ квадрата BD

Ответ: $\arcsin\frac{\sqrt{3}}{4}$.

14. $ABCD$ – ромб, CK – перпендикуляр к плоскости ромба, причем $CK = 2\sqrt{3}$, $AB = 4$ и $\angle BAD = 60°$. Найдите угол между плоскостью ABK и плоскостью ромба.

Ответ: $45°$.

15. Треугольник ABC, $\angle C = 90°$, опирастся катетом AC на плоскость α, образуя с ней двугранный угол в $45°$. Катет $AC = 2$, а гипотенуза AB относится к катету BC, как $3:1$. Определите расстояние от вершины B до плоскости α.

Ответ: 0,5.

16. Дан треугольник ABC со сторонами: $AB = 9$; $BC = 6$ и $AC = 5$. Через сторону AC проходит плоскость α, составляющая с плоскостью треугольника угол в $45°$. Найдите расстояние между плоскостью α и вершиной B.

Ответ: 4.

17. В тетраэдре $ABCD$ известны длины ребер: $AB = 14$, $DC = 8$, $AC = BC = AD = BD = 9$. Найдите величину двугранного угла при ребре AB.

Ответ: $90°$.

18. Треугольники ABC и ABD – равнобедренные, причем $AC = BC = 15$, $AB = 18$, $\angle ADB = 90°$. Найдите косинус угла между плоскостями ABC и ABD, если $CD = 6$.

Ответ: $\frac{7}{8}$.

19. $ABCDA_1B_1C_1D_1$ – куб. Найдите угол между прямыми DC_1 и CB_1.

Ответ: $60°$.

20. Треугольник ABC – прямоугольный, $\angle C = 90°$, треугольник DBE – равносторонний. Найдите линейный угол между плоскостями треугольников, если стороны AC и DE параллельны, расстояние между ними $\sqrt{3}$, а $BC = DE = 2$.

Ответ: $\arccos\frac{\sqrt{3}}{3}$.

21. Катеты прямоугольного треугольника равны 7 и 24. Определите расстояние от вершины прямого угла до плоскости, которая проходит через гипотенузу и составляет угол в $30°$ с плоскостью треугольника.

Ответ: 3,36.

22. Точка, взятая внутри двугранного угла в $60°$, удалена от обеих граней на a. Найдите её расстояние от ребра.

Ответ: $2a$.

23. В трехгранном угле все плоские углы прямые. Внутри него дана точка на расстоянии 1; 2 и 2 от его граней. Найдите расстояние данной точки от вершины угла.

Ответ: 3.

24. Найдите двугранный угол $ABCD$ тетраэдра $ABCD$, если углы DAB, DAC, ACB - прямые, $AC = CB = 5$, $DB = 5\sqrt{5}$.

Ответ: $60°$.

25. Внутри двугранного угла величиной $120°$ дана точка M, удаленная от каждой грани на расстояние a. Найдите расстояние от этой точки до ребра двугранного угла.

Ответ: $\frac{2a\sqrt{3}}{3}$.

26. Через сторону AM правильного треугольника ABM проведена плоскость. Медиана BD образует угол $60°$ с плоскостью. Найдите синус угла между прямой AB и плоскостью.

Ответ: $\frac{3}{4}$.

27. Наклонная образует угол $45°$ с плоскостью. Через основание наклонной проведена прямая в плоскости под углом $45°$ к проекции наклонной. Найдите угол между этой прямой и наклонной.

Ответ: $60°$.

28. Все ребра четырехугольной пирамиды равны между собой. Определите угол между боковым ребром и плоскостью основания пирамиды.

Ответ: $45°$.

29. Основания равнобедренной трапеции равны 10 и 34, а высота – 32. Через большее основание проведена плоскость α, образующая с высотой трапеции угол в $60°$. Определите проекцию боковой стороны трапеции на плоскость α.

Ответ: 20.

30. Из точки K, взятой вне плоскости ромба, опущены на стороны ромба перпендикуляры, наклоненные к плоскости ромба под углом $60°$. Найдите расстояние от точки K до плоскости ромба, если его диагонали соответственно равны 15 и 20.

Ответ: $6\sqrt{3}$.

31. Из точки, взятой вне плоскости, проведены к данной плоскости перпендикуляр и две наклонные, из которых одна образует с плоскостью угол в $30°$, а вторая - в $60°$. Сумма длин проекций этих наклонных на плоскость равна 8. Определите длину наклонных.

Ответ: 4; $4\sqrt{3}$.

32. В одной грани двугранного угла проведена прямая под углом $30°$ к другой грани и под углом $45°$ к ребру. Найдите величину двугранного угла.

Ответ: $45°$.

33. Катет равнобедренного прямоугольного треугольника лежит в данной плоскости, а гипотенуза образует с ней угол $30°$. Найдите угол между этой плоскостью и плоскостью треугольника.

Ответ: $45°$.

34. Из точки на ребре прямого двугранного угла проведены на гранях две прямые, наклоненные каждая под углом $45°$ к ребру. Найдите угол между этими прямыми.

Ответ: $60°$.

35. Два равнобедренных треугольника ABC и ACD имеют общее основание AC, двугранный угол при AC равен $60°$, а угол, образованный стороной BC и плоскостью ACD, равен $45°$. Найдите площадь треугольника ABC, если $BC = 6$.

Ответ: $12\sqrt{2}$.

36. Стороны треугольника равны 11; 13; 20. Через вершину меньшего угла к плоскости треугольника проведен перпендикулярный отрезок, а из верхнего его конца опущен перпендикуляр на противолежащую этому углу сторону, который образует с плоскостью треугольника угол $60°$. Найдите длину перпендикуляра, проведенного к плоскости треугольника.

Ответ: $12\sqrt{3}$.

37. Концы отрезка AB лежат на гранях прямого двугранного угла. Из точек A и B опущены перпендикуляры AC и BD на ребро двугранного угла. Найдите BD, если $AB = 7$; $DC = 3$; $AC = 2$.

Ответ: 6.

38. Из точки K, лежащей внутри двугранного угла, опущен перпендикуляр KM на ребро этого угла. Расстояние от точки K до одной из граней равно проекции перпендикуляра KM на эту грань. Отрезок KM в два раза больше, чем его проекция на вторую грань. Определите величину двугранного угла.

Ответ: $105°$.

39. Через вершину A прямоугольного треугольника ABC $(\angle C = 90°)$ проведена плоскость α, параллельная прямой BC. Угол между катетом AC и его проекцией на плоскость α равен $60°$. $AC = 10$; $BC = 8$. Вычислите периметр проекции треугольника ABC на плоскость α.

Ответ: $13 + \sqrt{89}$.

40. Катеты прямоугольного треугольника равны 7 и 24. Найдите расстояние от вершины прямого угла до плоскости, которая проходит через гипотенузу и составляет угол в $30°$ с плоскостью треугольника.

Ответ: $3\frac{9}{25}$.

§ 2. МНОГОГРАННИКИ

БЛОК 1. Решите задачи по теме «Призма, параллелепипед, куб»:

А

1. В правильной четырехугольной призме площадь основания 144, а высота равна 14. Определите диагональ этой призмы.

Ответ: 22.

2. В основании прямой призмы лежит равнобедренный прямоугольный треугольник с гипотенузой, равной $8\sqrt{2}$. Диагональ боковой грани, проходящей через катет, равна 10. Найдите объем призмы.

Ответ: 192.

3. Боковая поверхность правильной четырехугольной призмы 32, а полная поверхность 40. Найдите высоту.

Ответ: 4.

4. Правильная четырехугольная призма имеет объем 60, а боковую поверхность – 120. Найдите расстояние от центра симметрии нижнего основания до вершины верхнего основания.

Ответ: $\sqrt{227}$.

5. В наклонной треугольной призме расстояния между боковыми ребрами 10, 17 и 21, а боковое ребро 18. Найдите объем призмы.

Ответ: 1 512.

6. Основанием прямой призмы служит равнобедренный треугольник с углом $120°$ при вершине. Диагональ грани, противоположной этому углу, имеет длину 6 и составляет с плоскостью основания угол $60°$. Найдите объем призмы.

Ответ: 6,75.

7. Основанием прямой призмы служит ромб с острым углом $60°$, угол между меньшей диагональю ромба и меньшей диагональю призмы также равен $60°$. Найдите объем призмы, если меньшая диагональ ромба равна 6.

Ответ: 324.

8. Основанием прямой призмы служит равнобедренный прямоугольный треугольник. Диагональ грани, противоположной прямому углу, равна 4 и составляет с плоскостью основания угол $30°$. Найдите объем призмы.

Ответ: 6.

9. Основание прямой призмы – прямоугольный треугольник с катетом 3 и прилежащим к нему углом $60°$. Диагональ боковой грани, содержащей гипотенузу треугольника, равна 10. Найдите объем призмы.

Ответ: $36\sqrt{3}$.

10. В прямом параллелепипеде стороны основания равны 8 и 4 и составляют угол в $60°$. Меньшая диагональ параллелепипеда $8\sqrt{3}$. Какой угол составляет эта диагональ с плоскостью основания?

Ответ: $60°$.

11. В прямом параллелепипеде стороны основания равны 3 и 5 и образуют угол в $60°$, боковое ребро равно $7\sqrt{2}$. Какой угол составляет с плоскостью основания большая диагональ параллелепипеда?

Ответ: $\operatorname{arctg}\sqrt{2}$.

12. Плоскость проходит через середины трех ребер прямоугольного параллелепипеда, исходящих из одной вершины, и отсекает от него пирамиду объемом 6. Найдите объем параллелепипеда.

Ответ: 288.

13. В прямом параллелепипеде боковое ребро равно 10. Большая диагональ основания равна 9 и образует с большей стороной основания, равной 7, угол, синус которого $\frac{4\sqrt{5}}{21}$. Найдите боковую поверхность параллелепипеда.

Ответ: 220.

14. Основанием наклонного параллелепипеда служит ромб с острым углом $30°$ и стороной 5. Боковое ребро равно $\frac{4}{\sqrt{3}}$ и наклонено к плоскости основания под углом $60°$. Найдите объем параллелепипеда.

Ответ: 25.

15. Стороны основания прямого параллелепипеда равны 6 и 10, один из углов основания равен $60°$, меньшая диагональ параллелепипеда составляет с плоскостью основания угол $30°$. Найдите объем параллелепипеда.

Ответ: $60\sqrt{19}$.

16. Каждое ребро прямого параллелепипеда имеет длину 6, один из углов его основания равен $30°$. Найдите объем параллелепипеда.

Ответ: 108.

17. Стороны основания прямого параллелепипеда 6 и 8, а диагонали параллелепипеда наклонены к основанию под углами $45°$ и $30°$. Найдите длины этих диагоналей.

Ответ: 10; $10\sqrt{2}$.

18. Стороны основания прямого параллелепипеда 2 и 7, а один из углов основания $60°$. Меньшая диагональ параллелепипеда 8. Найдите площадь боковой поверхности параллелепипеда.

Ответ: 90.

19. Площадь диагонального сечения куба равна $8\sqrt{2}$. Найдите площадь поверхности куба.

Ответ: 48.

20. Объем куба равен $16\sqrt{2}$. Найдите радиус окружности, описанной вокруг грани куба.

Ответ: 2.

21. Ребро куба равно a. Найдите угол наклона диагонали куба к плоскости основания куба.

Ответ: $\arcsin\frac{\sqrt{3}}{3}$.

22. Площадь поверхности куба 54. Найдите его диагональ.

Ответ: $3\sqrt{3}$.

B

23. Все ребра прямой треугольной призмы имеют одинаковую длину. Площадь полной поверхности призмы равна $12+24\sqrt{3}$. Найдите площадь основания призмы.

Ответ: 6.

24. Стороны основания прямой треугольной призмы 13, 14 и 15, а боковое ребро равно средней по длине высоте основания. Найдите объем призмы.

Ответ: 1 008.

25. В основании прямой призмы ромб со стороной, равной 12, и острым углом $60°$. Через меньшую диагональ ромба проведено перпендикулярное сечение и его площадь равна 180. Определите объем этой призмы.

Ответ: $1\,080\sqrt{3}$.

26. Площадь основания прямой треугольной призмы равна 4, а площади боковых граней 9; 10; 17. Найдите объем призмы.

Ответ: 12.

27. Основанием прямой призмы служит равнобедренная трапеция $ABCD$: $AB=CD=13$; $BC=11$; $AD=21$. Площадь ее диагонального сечения равна 180. Вычислите полную поверхность призмы.

Ответ: 906.

28. В основании прямой призмы лежит правильный треугольник со стороной 5. Прямая, проходящая через середину стороны нижнего основания и противоположную вершину верхнего основания, наклонена к плоскости основания под углом $45°$. Найдите объем призмы.

Ответ: 46,875.

29. Стороны основания прямой треугольной призмы равны 10; 13 и 13. Найдите площадь сечения этой призмы плоскостью, проходящей через меньшую по длине сторону нижнего основания и середину противолежащего ей бокового ребра, если длина бокового ребра равна 10.

Ответ: 65.

30. Найдите площадь полной поверхности правильной четырехугольной призмы, диагональ которой равна 14, диагональ боковой грани 10.

Ответ: $32\sqrt{6}\left(\sqrt{6}+1\right)$.

31. Основание прямого параллелепипеда ромб, площадь которого равна 3, а площади диагональных сечений 3 и 2. Найдите объем.

Ответ: 3.

32. В прямоугольном параллелепипеде стороны основания относятся как $2:3$, а диагональное сечение есть квадрат с площадью 169. Найдите объем параллелепипеда.

Ответ: 1 014.

33. Основанием прямой призмы является треугольник со сторонами 9; 19 и 20. Отрезок, являющийся расстоянием от вершины большего угла верхнего основания до противолежащей стороны нижнего основания, наклонен к плоскости основания под углом $30°$. Найдите объем призмы.

Ответ: $240\sqrt{3}$

34. Через диагональ нижнего основания прямоугольного параллелепипеда и противоположную ей вершину верхнего основания проведена плоскость. Определите объем параллелепипеда, если площадь треугольника, образовавшегося в сечении, равна 20, а основанием параллелепипеда служит квадрат со стороной $4\sqrt{2}$.

Ответ: 96.

35. Найдите объем прямоугольного параллелепипеда, если угол между его диагональю и боковой гранью составляет $30°$, а в основании лежит квадрат со стороной, равной $2\sqrt{2}$

Ответ: 32.

36. Найдите диагональ прямоугольного параллелепипеда, если диагонали его граней имеют длины 11; 19 и 20.

Ответ: 21.

37. Основание прямого параллелепипеда – ромб с периметром 40. Боковое ребро параллелепипеда равно 9, а одна из его диагоналей – 15. Найдите объем параллелепипеда.

Ответ: 864.

38. Расстояния от центра прямоугольного параллелепипеда до его ребер равны $\sqrt{13}$, $2\sqrt{5}$ и 5. Найдите объем параллелепипеда.

Ответ: 192.

39. Центр верхнего основания куба с ребром a соединен с серединами сторон нижнего основания, которые также последовательно соединены. Вычислите полную поверхность образовавшейся пирамиды.

Ответ: $2a^2$.

40. Найдите площадь сечения куба плоскостью, проходящей через сторону верхнего основания, если величина угла между плоскостью этого основания и секущей плоскостью равна $30°$, а длина ребра куба 5.

Ответ: $\frac{50\sqrt{3}}{3}$.

БЛОК 2. Решите задачи по теме «Пирамида, усеченная пирамида»:

А

1. Высота правильной четырехугольной пирамиды равна 6, а апофема 6,5. Найдите периметр основания этой пирамиды.

Ответ: 20.

2. Боковая поверхность правильной пирамиды равна 24, а площадь основания равна 12. Под каким углом наклонены боковые грани к основанию?

Ответ: $60°$.

3. Объем правильной четырехугольной пирамиды 48, высота равна 4. Найдите площадь боковой поверхности пирамиды.

Ответ: 60.

4. Высота пирамиды 16. Площадь основания равна 512. На каком расстоянии от основания находится сечение, параллельное ему, если площадь сечения 50.

Ответ: 11.

5. В основании пирамиды лежит квадрат с диагональю, равной 6. Одно из боковых ребер перпендикулярно основанию. Большее боковое ребро наклонено к основанию под углом в $45°$. Чему равен объем пирамиды?

Ответ: 36.

6. В треугольной пирамиде две боковые грани взаимно перпендикулярны. Площади этих граней равны P и Q, а длина их общего ребра равна a. Определите объем пирамиды.

Ответ: $\frac{2PQ}{3a}$.

7. Основанием пирамиды служит прямоугольник со сторонами 4 и 6. Каждое из боковых ребер равно 7. Найдите объем пирамиды.

Ответ: 48.

8. В пирамиде плоскость сечения параллельного основанию делит высоту в отношении $1:1$. Найдите площадь сечения, если площадь основания равна 60.

Ответ: 15.

9. Боковые ребра треугольной пирамиды взаимно перпендикулярны, каждое ребро равно 3. Найдите объем пирамиды.

Ответ: 4,5.

10. Объем правильной четырехугольной пирамиды равен 20, а ее высота равна 1. Найдите длину апофемы пирамиды.

Ответ: 4.

11. Высота правильной треугольной пирамиды в два раза меньше стороны основания. Найдите угол между боковой гранью пирамиды и плоскостью основания.

Ответ: $60°$.

12. Найдите объем правильной треугольной пирамиды, если все боковые ребра наклонены к плоскости основания под углом $45°$, а медиана основания равна $6\sqrt{3}$.

Ответ: 144.

13. Высота основания правильной треугольной пирамиды равна 3, боковое ребро составляет с высотой пирамиды угол $30°$. Найдите объем пирамиды.

Ответ: 6.

14. Найдитс площадь основания правильной треугольной пирамиды, у которой высота равна $10\sqrt[4]{3}$, а двугранный угол при стороне основания равен $45°$.

Ответ: 900.

15. Все боковые грани треугольной пирамиды составляют с плоскостью основания угол $45°$. Найдите высоту пирамиды, если стороны ее основания равны 20; 21 и 29.

Ответ: 6.

16. В основании пирамиды треугольник со сторонами 7; 10 и 13. Высота пирамиды 4. Найдите величину двугранного угла при основании пирамиды, если все боковые грани одинаково наклонены к плоскости основания.

Ответ: $60°$.

17. В основании пирамиды лежит равнобедренная трапеция, длины оснований которой равны 16 и 4. Найдите высоту пирамиды, если каждая ее боковая грань составляет с основанием угол $60°$.

Ответ: $4\sqrt{3}$.

18. Сечение пирамиды плоскостью, параллельной основанию, делит высоту пирамиды в отношении $2:3$, считая от вершины. Площадь основания пирамиды равна 360. Найдите площадь ее сечения.

Ответ: 57,6.

19. Основание пирамиды – треугольник со сторонами 5; 5 и 6, высота пирамиды проходит через центр круга, вписанного в этот треугольник, и равна 2. Найдите площадь боковой поверхности пирамиды.

Ответ: 20.

20. Плоские углы при вершине треугольной пирамиды прямые, боковые ребра пирамиды равны 5; 6; 7. Найдите объем пирамиды.

Ответ: 35.

21. Стороны оснований правильной усеченной четырехугольной пирамиды равны 4 и 6. Найдите площадь диагонального сечения, если боковое ребро образует с большим основанием угол, равный $45°$.

Ответ: 10.

22. Найдите высоту правильной усеченной четырехугольной пирамиды, стороны оснований которой равны 14 и 10, а диагональ равна 18.

Ответ: 6.

23. В основаниях усеченной пирамиды правильные треугольники со сторонами 2 и 6. Определите высоту этой пирамиды, если ее объем равен $52\sqrt{3}$.

Ответ: 12.

B

24. Основанием пирамиды служит ромб со стороной 14 и острым углом $60°$. Двугранные углы при основании пирамиды по $45°$. Вычислите объем пирамиды.

Ответ: 343.

25. Площадь основания правильной четырехугольной пирамиды 36, а ее боковая поверхность 60. Найдите объем пирамиды.

Ответ: 48.

26. В основании пирамиды треугольник со сторонами 13, 14 и 15. Найдите высоту пирамиды, если все высоты боковых граней равны 14.

Ответ: $6\sqrt{5}$.

27. В каком отношении делит объем пирамиды плоскость, параллельная основанию, если она делит высоту в отношении $3:2$?

Ответ: $27:98$.

28. Основанием пирамиды является ромб со стороной 6 и острым углом $30°$. Найдите площадь полной поверхности пирамиды, если каждый двугранный угол при основании равен $60°$.

Ответ: 54.

29. В основании треугольной пирамиды $FABC$ лежит правильный треугольник ABC со стороной, равной $\sqrt{3}$, $FA=\sqrt{3}$. Боковые грани пирамиды имеют равные площади. Найдите объем пирамиды.

Ответ: $\frac{\sqrt{6}}{4}$.

30. В правильной треугольной пирамиде боковое ребро, равное 6, наклонено к основанию под углом $30°$. Найдите объем пирамиды.

Ответ: $\frac{81\sqrt{3}}{4}$.

31. Высота правильной треугольной пирамиды равна $2\sqrt{3}$, а боковая грань образует с плоскостью основания угол $60°$. Найдите объем пирамиды.

Ответ: 24.

32. Найдите объем правильного тетраэдра с ребром, равным a.

Ответ: $\frac{\sqrt{2}a^3}{12}$.

33. Плоский угол при вершине правильной треугольной пирамиды равен $90°$. Площадь боковой поверхности пирамиды равна 192. Найдите радиус окружности, описанной около боковой грани пирамиды.

Ответ: 8.

34. Угол между боковой гранью и плоскостью основания правильной треугольной пирамиды равен $45°$. Объем пирамиды равен $\frac{1}{3}$. Найдите сторону основания пирамиды.

Ответ: 2.

35. Основание пирамиды – ромб с диагоналями 6 и 8, высота пирамиды проходит через точку пересечения диагоналей ромба и равна 1. Найдите боковую поверхность пирамиды.

Ответ: 26.

36. В четырехугольной пирамиде все боковые ребра наклонены к плоскости основания под углом $60°$. В основании ее лежит равнобедренная трапеция, больший угол которой $120°$. Диагональ трапеции является биссектрисой ее острого угла. Высота пирамиды равна $4\sqrt{3}$. Найдите большее основание трапеции.

Ответ: 8.

37. Определите объем правильной четырехугольной пирамиды, зная угол $\alpha = 30°$, составленный ее боковым ребром с плоскостью основания, и площадь ее диагонального сечения $S = \sqrt{3}$.

Ответ: 2.

38. Основание пирамиды – правильный треугольник со стороной $\sqrt[4]{15}$. Одно из боковых ребер перпендикулярно основанию, а два других наклонены к плоскости основания под углами $60°$. Найдите площадь большей боковой грани пирамиды.

Ответ: 3,75.

39. Основанием пирамиды служит прямоугольник с площадью 81. Две боковые грани перпендикулярны плоскости основания, а две другие образуют с ней углы $30°$ и $60°$. Найдите объем пирамиды.

Ответ: 243.

40. Найдите объем пирамиды, основанием которой служит равнобедренная трапеция с основаниями 10 и 20, а боковые грани образуют с плоскостью основания двугранные углы, равные $60°$.

Ответ: $500\sqrt{3}$.

41. В основании пирамиды лежит прямоугольный равнобедренный треугольник с гипотенузой c. Каждое ребро пирамиды наклонено к плоскости основания под углом $45°$. Найдите площадь полной поверхности пирамиды.

Ответ: $\frac{c^2}{4}\left(2+\sqrt{3}\right)$.

42. Сторона основания правильной треугольной пирамиды равна a. Величина угла, образованного высотой пирамиды с боковой гранью, равна $30°$. Найдите площадь полной поверхности пирамиды.

Ответ: $\frac{3a^2\sqrt{3}}{4}$.

43. Угол между высотой правильной четырехугольной пирамиды и ее боковым ребром равен $60°$. Найдите площадь полной поверхности пирамиды, если высота ее равна 10.

Ответ: $200\left(3+\sqrt{15}\right)$.

44. Основание пирамиды – ромб с большей диагональю 12 и острым углом $60°$. Все двугранные углы при основании пирамиды равны $45°$. Найдите объем пирамиды.

Ответ: $24\sqrt{3}$.

45. Основаниями правильной усеченной пирамиды служат квадраты со сторонами a и b $(a>b)$. Боковые ребра наклонены к плоскости основания под углом α. Определите величину двугранных углов при сторонах оснований.

Ответ: $\operatorname{arctg}\left(\sqrt{2}\operatorname{tg}\alpha\right)$.

46. В треугольной усеченной пирамиде высота равна 10. Стороны одного основания равны 27, 29 и 52, а периметр другого основания равен 72. Определите объем усеченной пирамиды.

Ответ: 1900.

47. В основаниях усеченной пирамиды лежат прямоугольные треугольники с острым углом $60°$. Гипотенузы этих треугольников равны 6 и 4. Высота данной пирамиды $\sqrt{3}$. Найдите объем усеченной пирамиды.

Ответ: 9,5.

48. Стороны оснований правильной четырехугольной усеченной пирамиды равны 4 и $4\sqrt{3}$; боковая грань наклонена к плоскости основания под углом $60°$. Найдите полную поверхность пирамиды

Ответ: 128.

49. Стороны основания правильной четырехугольной усеченной пирамиды относятся, как $3:2$. Высота пирамиды равна 3. Боковое ребро составляет с плоскостью основания угол $60°$. Найдите объем пирамиды.

Ответ: 114.

50. Боковое ребро правильной четырехугольной усеченной пирамиды равно $\sqrt{3}$ и наклонено к плоскости основания под углом $60°$. Диагональ пирамиды перпендикулярна боковому ребру. Найдите площадь меньшего основания пирамиды.

Ответ: 1,5.

§ 3. ТЕЛА ВРАЩЕНИЯ

БЛОК 1. Решите задачи по теме «Цилиндр»:

А

1. Развертка цилиндра представляет собой квадрат со стороной $2\sqrt[3]{\pi}$. Чему равен объем цилиндра?

Ответ: 2.

2. Развертка цилиндра – прямоугольник, диагональ которого равна 8 и составляет с основанием угол $30°$. Найдите объем цилиндра.

Ответ: $\frac{48}{\pi}$.

3. Диагонали осевого сечения цилиндра пересекаются под углом $90°$. Найдите высоту цилиндра, если его боковая поверхность равна 4π.

Ответ: 2.

4. Сечение цилиндра, параллельное его оси, отсекает от окружности основания дугу в $60°$. Найдите площадь сечения, если высота цилиндра h, радиус его основания r.

Ответ: hr.

5. Высота цилиндра равна 5, диагональ осевого сечения составляет угол $45°$ с плоскостью основания. Найдите площадь полной поверхности цилиндра.

Ответ: $37{,}5\pi$.

6. Найдите отношение площади боковой поверхности цилиндра к площади его осевого сечения.

Ответ: π.

7. Осевое сечение цилиндра – квадрат, площадь которого 100. Определите площадь основания цилиндра.

Ответ: 25π.

8. Высота цилиндра равна 6, радиус основания равен 5. Найдите площадь сечения, проведенного параллельно оси цилиндра на расстоянии 4 от нее.

Ответ: 36.

9. Диаметр основания цилиндра равен 10. На расстоянии 3 от оси цилиндра проведено сечение, параллельное оси и имеющее форму квадрата. Найдите площадь данного сечения.

Ответ: 64.

10. Радиус основания цилиндра увеличен в четыре раза, а высота уменьшена во столько же раз. Как изменится объем цилиндра?

Ответ: увеличится в 4 раза.

11. Радиус основания цилиндра в 3 раза меньше высоты, а площадь полной поверхности равна 288π. Найдите размеры цилиндра.

Ответ: $r = 6$, $h = 18$.

12. Площадь осевого сечения цилиндра равна $6\sqrt{\pi}$, а площадь основания цилиндра равна 25. Найдите высоту цилиндра.

Ответ: $0,6\pi$.

13. Диагональ осевого сечения цилиндра на 25% превышает диаметр основания. Найдите площадь полной поверхности цилиндра, если расстояние между центрами оснований равно 18.

Ответ: 720π.

14. Плоскость, параллельная оси цилиндра, отсекает от окружности основания дугу в $120°$ и удалена от оси на расстояние, равное a. Диагональ в получившемся сечении равна $4a$. Найдите объем цилиндра.

Ответ: $8\pi a^3$

15. Плоскость, параллельная оси цилиндра, отстоит от нее на расстоянии, равном 15. Диагональ получившегося сечения равна 20, а радиус основания цилиндра 17. Найдите объем цилиндра.

Ответ: $3\,468\pi$.

16. Боковая поверхность цилиндра равна S, а длина окружности основания C. Найдите объем.

Ответ: $\dfrac{CS}{4\pi}$.

17. Высота цилиндра равна длине окружности основания. Найдите диаметр основания, если объем цилиндра равен $432\pi^2$.

Ответ: 12.

18. Отрезок AB, концы которого лежат на разных окружностях оснований цилиндра, пересекает ось цилиндра под углом $30°$. Найдите объем цилиндра, если длина отрезка AB равна $4\sqrt{3}$

Ответ: 18π.

19. Найдите боковую поверхность цилиндра, высота которого равна 5, если известно, что при увеличении его высоты на 4, объем увеличивается на 36π.

Ответ: 30π.

20. Осевое сечение цилиндра – квадрат, длина диагонали которого равна 20. Найдите радиус основания цилиндра.

Ответ: $5\sqrt{2}$.

21. Площадь осевого сечения прямого кругового цилиндра равна 24. Найдите площадь его боковой поверхности.

Ответ: 24π.

22. Площадь основания цилиндра относится к площади осевого сечения как $\pi : 4$. Определите угол между диагоналями осевого сечения.

Ответ: $90°$.

23. Квадрат со стороной 2 свернули в форму цилиндра. Найдите площадь основания этого цилиндра.

Ответ: $\frac{1}{\pi}$.

B

24. Найдите площадь сечения, параллельного оси цилиндра и отстоящего от нее на $\sqrt{2}$, если объем цилиндра $\frac{9\pi}{4}$, а длина образующей 1.

Ответ: 1.

25. Найдите площадь боковой поверхности цилиндра, образованного при вращении прямоугольника вокруг оси, содержащей его сторону, если периметр прямоугольника 24 и угол между диагоналями $60°$.

Ответ: $144\pi\sqrt{3}\left(2-\sqrt{3}\right)$.

26. Высота цилиндра на 2 меньше его радиуса. Площадь боковой поверхности цилиндра равна 160π. Найдите площадь осевого сечения цилиндра.

Ответ: 160.

27. Хорда нижнего основания цилиндра, равная $4\sqrt{14}$, удалена от центра нижнего основания на 5, а от центра верхнего основания – на 13. Найдите объем цилиндра.

Ответ: 972π.

28. Через образующую цилиндра проведены два взаимно перпендикулярных сечения, площади которых равны 16 и 30. Найдите боковую поверхность цилиндра.

Ответ: 34π.

29. Два цилиндра имеют равные объемы. Длины высот данных цилиндров относятся как $4:9$. Найдите отношение площадей боковых поверхностей данных цилиндров.

Ответ: $2:3$.

30. Разверткой боковой поверхности цилиндра служит прямоугольник $ABCD$, диагональ $AC = 8$. Найдите площадь боковой поверхности цилиндра, если угол между диагоналями равен $30°$.

Ответ: 16.

31. Отрезок AB равен 13, точки A и B лежат на разных окружностях оснований цилиндра. Найдите расстояние от отрезка AB до оси цилиндра, если его высота равна 5, а радиус основания равен 10.

Ответ: 8.

32. Через образующую цилиндра проведены два взаимно перпендикулярных сечения, площади которых равны 45 и 200. Найдите площадь осевого сечения.

Ответ: 205.

33. Площадь осевого сечения цилиндра равна 212. Через образующую цилиндра проведены два взаимно перпендикулярных сечения, площади которых относятся как 28 : 45. Найдите площади этих сечений.

Ответ: 112; 180.

34. Через образующую цилиндра проведены сечения ABB_1A_1 и ACC_1A_1, угол между которыми равен $60°$. Зная, что площади этих сечений равны 420 и 100, вычислите площадь сечения BCC_1B_1.

Ответ: 380.

35. Высота и радиус цилиндра соответственно равны 15 и 5. Отрезок $AB=17$ имеет концы на окружностях оснований цилиндра. Найдите расстояние от этого отрезка до оси цилиндра.

Ответ: 3.

36. Боковая поверхность цилиндра составляет половину его полной поверхности. Зная, что диагональ осевого сечения равна d, определите площадь полной поверхности цилиндра.

Ответ: $0{,}8\pi d^2$.

37. Диагональ осевого сечения цилиндра в 5,2 раза больше радиуса цилиндра. Зная, что боковая поверхность цилиндра равна 120, вычислите полную поверхность цилиндра.

Ответ: 145.

38. Из точки пересечения диагоналей осевого сечения цилиндра образующая видна под углом $60°$. Площадь основания равна S. Найдите боковую поверхность цилиндра.

Ответ: $\frac{4S\sqrt{3}}{3}$.

39. Разверткой боковой поверхности цилиндра является прямоугольник, одна из сторон которого вдвое больше другой. Боковая поверхность цилиндра равна 20. Определите полную поверхность цилиндра.

Ответ: $\frac{20(\pi+1)}{\pi}$.

40. Высота и радиус цилиндра соответственно равны 32 и 13. В этот цилиндр вписан прямоугольник так, что вершины его лежат на окружностях оснований цилиндра. Зная, что стороны прямоугольника относятся как $1:4$, определите площадь прямоугольника.

Ответ: 400.

БЛОК 2. Решите задачи по теме «Конус, усеченный конус»:

А

1. Высота конуса равна 5. На расстоянии 2 от вершины конуса его пересекает плоскость, параллельная основанию. Чему равен объем большего конуса, если объем меньшего составляет 24?

Ответ: 375.

2. Высота прямого конуса в 4 раза меньше образующей, а радиус основания конуса равен $3\sqrt{15}$. Найдите объем конуса.

Ответ: 135π.

3. Образующая конуса равна 10, высота – 8. Найдите объем конуса.

Ответ: 96π.

4. Найдите площадь боковой поверхности конуса, высота которого равна 4, а величина угла при вершине осевого сечения равна $90°$.

Ответ: $16\sqrt{2}\pi$.

5. Периметр осевого сечения конуса равен 24, а величина угла наклона образующей к плоскости основания равна $60°$. Найдите площадь полной поверхности конуса.

Ответ: 48π.

6. Площадь осевого сечения равна 32, а величина угла между высотой и образующей равна $45°$. Найдите площадь полной поверхности конуса.

Ответ: $32\pi\left(1+\sqrt{2}\right)$.

7. Объем конуса равен $9\sqrt{3}\pi$. Найдите высоту конуса, если его осевое сечение – равносторонний треугольник.

Ответ: $3\sqrt{3}$.

8. Объем конуса равен 16π, а его высота имеет длину 3. Найдите боковую поверхность конуса.

Ответ: 20π.

9. Боковая поверхность конуса равна 36π, а образующая конуса в три раза больше радиуса основания. Определите объем конуса.

Ответ: $16\sqrt{6}\pi$.

10. Высота и образующая конуса относятся как $12:13$. Определите полную поверхность конуса, если его объем равен 800π.

Ответ: 360π.

11. Осевое сечение конуса – равнобедренный треугольник с углом $120°$ и равными сторонами по 16. Найдите площадь полной поверхности конуса.

Ответ: $64\pi\left(3+2\sqrt{3}\right)$.

12. Высота конуса 4, радиус основания 3, боковая поверхность конуса развернута на плоскость. Найдите угол полученного сектора.

Ответ: $216°$.

13. Высота конуса 15, а объем равен 320π. Определите полную поверхность.

Ответ: 200π.

14. Высота и образующая конуса относятся как $35:37$, боковая поверхность конуса равна 444π. Найдите объем этого конуса.

Ответ: $1\,680\pi$.

15. Высота конуса равна 12, периметр осевого сечения равен 36. Найдите объем конуса.

Ответ: 100π.

16. Через две образующие конуса проведена плоскость, отсекающая от основания дугу в $120°$. Определите боковую поверхность конуса, если радиус основания конуса равен 4 и плоскость сечения образует с плоскостью основания угол $45°$.

Ответ: $8\sqrt{5}\,\pi$.

17. Боковая поверхность конуса вдвое больше площади его основания. Найдите угол в развертке боковой поверхности конуса.

Ответ: $180°$.

18. Угол между высотой и образующей конуса равен $30°$. Вычислите объем конуса, если образующая конуса 12.

Ответ: $72\sqrt{3}\,\pi$.

19. Радиус кругового сектора равен 6, а его угол - $30°$. Сектор свернут в коническую поверхность. Найдите площадь основания конуса.

Ответ: $\frac{\pi}{4}$.

20. Радиус основания конуса равен 12, образующая – 40. Найдите угол развертки конуса.

Ответ: $108°$.

21. Радиус основания конуса равен $\frac{1}{\sqrt{3}}$. Каким должен быть угол между образующей конуса и плоскостью основания, чтобы боковая поверхность конуса была равна $\frac{\pi}{\sqrt{3}}$?

Ответ: $\arccos\frac{1}{\sqrt{3}}$.

22. Найдите угол α между образующей конуса и его высотой, если радиус основания конуса равен 3, а объем равен π.

Ответ: $\operatorname{arc\,tg} 9$.

23. Радиусы оснований усеченного конуса равны 5 и 11, образующая – 10. Найдите площадь его осевого сечения.

Ответ: 128.

24. Найдите площадь полной поверхности усеченного конуса, если радиусы его оснований 3 и 5, а образующая 10.

Ответ: 114π.

25. Радиусы оснований усеченного конуса равны 1 и 9, образующая равна 10. Найдите объем.

Ответ: 182π.

26. Найдите площадь полной поверхности усеченного конуса, если он образован вращением прямоугольной трапеции с основаниями 13 и 18 вокруг меньшей стороны, равной 12.

Ответ: 896π.

27. Образующая усеченного конуса равна 8 и наклонена к плоскости основания под углом $60°$. Диагональ осевого сечения делит этот угол пополам. Найдите площадь полной поверхности усеченного конуса.

Ответ: 176π.

28. Радиусы оснований усеченного конуса относятся как $5:3$; образующая равна 17, а высота – 15. Найдите радиусы оснований.

Ответ: 12; 20.

29. Радиусы оснований усеченного конуса равны 11 и 27; образующая относится к высоте как $17:15$. Найдите площадь осевого сечения.

Ответ: 1 140.

30. Найдите объем усеченного конуса, если радиусы его оснований равны 3 и 1, а образующая наклонена к нижнему основанию под углом $60°$.

Ответ: $\frac{26\pi}{\sqrt{3}}$.

31. Средняя линия осевого сечения усеченного конуса равна 11, высота – 8, разность радиусов оснований – 3. Найдите объем усеченного конуса.

Ответ: 248π.

32. В усеченном конусе диагональ его осевого сечения равна 17, высота – 15 и проекция образующей на плоскость основания – 2. Найдите объем усеченного конуса.

Ответ: 245π.

В

33. Определите полную поверхность конуса, если периметр осевого сечения равен $\frac{64}{\sqrt{\pi}}$, а угол развертки боковой поверхности составляет $120°$.

Ответ: 256.

34. Высота конуса равна $\sqrt[3]{\frac{24}{\pi}}$. Разверткой боковой поверхности этого конуса является сектор с центральным углом $120°$ Вычислите объем конуса.

Ответ: 1.

35. Хорда основания конуса, стягивающая центральный угол $120°$, равна $6\sqrt{3}$ и удалена от вершины конуса на 5. Найдите объем конуса.

Ответ: 48π.

36. Высота конуса 20, радиус его основания 25. Найдите площадь сечения, проведенного через вершину, если его расстояние от центра основания конуса равно 12.

Ответ: 500.

37. Через вершину конуса под углом $45°$ к основанию проведена плоскость, отсекающая четверть окружности основания. Высота конуса равна 2. Найдите площадь сечения.

Ответ: $4\sqrt{2}$.

38. Высота конуса 6, а боковая поверхность 24π. Определите объем конуса.

Ответ: 24π.

39. На общем основании построены два конуса один внутри другого так, что их вершины находятся на одной прямой, на расстоянии 12 одна от другой. Определите поверхность тела, ограниченного коническими поверхностями этих конусов, если угол при вершине осевого сечения одного конуса равен $120°$, а другого $60°$.

Ответ: $72\pi\left(3+\sqrt{3}\right)$.

40. На поверхности конуса можно провести три взаимно перпендикулярные образующие длиной 3 каждая. Определите боковую поверхность конуса.

Ответ: $3\sqrt{6}\,\pi$.

41. Конус и цилиндр имеют общие основания, а вершина конуса находится в центре другого основания цилиндра. Боковая поверхность цилиндра равна боковой поверхности конуса. Найдите угол между образующими конуса и образующими цилиндра.

Ответ: 60° .

42. Радиусы оснований усеченного конуса равны 9 и 24. Из точки пересечения диагоналей осевого сечения образующая видна под углом в 60° . Найдите боковую поверхность усеченного конуса.

Ответ: $462\sqrt{3}\,\pi$.

43. Найдите боковую поверхность усеченного конуса, у которого радиусы оснований равны 11 и 21, а диагональ осевого сечения 40.

Ответ: 832π .

44. Усеченный конус, у которого радиусы оснований равны 7 и 8, и полный конус такой же высоты равновелики. Найдите радиус основания полного конуса.

Ответ: 13.

БЛОК 3. Решите задачи по теме «Сфера, шар»:

А

1. Через середину радиуса шара проведена перпендикулярная к нему плоскость. Как относится площадь полученного сечения к площади большого круга?

Ответ: $3:4$.

2. Радиус шара R . Через конец радиуса проведена плоскость под углом в 60° к нему. Найдите площадь сечения.

· **Ответ**: $\frac{1}{4}\pi R^2$.

3. Дан шар радиуса R. Через одну точку его поверхности проведены две плоскости: первая – касательная к шару, вторая – под углом в $30°$ к первой. Найдите площадь сечения.

Ответ: $\frac{1}{4}\pi R^2$.

4. На поверхности шара даны три точки. Прямолинейные расстояния между ними 6; 8; 10. Радиус шара 13. Найдите расстояние от центра шара до плоскости, проходящей через эти три точки.

Ответ: 12.

5. Диаметр сечения шара, удаленного от центра шара на $\sqrt{5}$, равен 4. Найдите площадь поверхности шара.

Ответ: 36π.

6. Через конец радиуса шара под углом $60°$ к радиусу проведено сечение шара, имеющее площадь 16π. Найдите объем шара.

Ответ: $\frac{2\,048}{3}\pi$.

7. Внешний диаметр полого шара 18. Толщина стенок 3. Найдите объем материала, из которого изготовлен шар.

Ответ: 684π.

8. Все стороны квадрата касаются сферы диаметром 50, сторона квадрата равна 14. Найдите расстояние от центра сферы до плоскости квадрата.

Ответ: 24.

9. Линия пересечения сферы и плоскости, удаленной от центра сферы на 8, имеет длину 12π. Найдите площадь поверхности сферы.

Ответ: 400π

10. Диаметр шара равен $2m$. Через конец диаметра проведена плоскость под углом $45°$ к нему. Найдите длину линии пересечения сферы этой плоскостью.

Ответ: $\sqrt{2}m\pi$.

11. Площадь сечения шара плоскостью равна 25π. Радиус шара OA образует с радиусом сечения O_1A угол, косинус которого равен $\frac{2}{3}$. Найдите длину радиуса шара.

Ответ: 7,5.

12. Объем шара $\frac{32}{3}\pi$. Определите площадь полной поверхности шара.

Ответ: 16π.

13. Определите радиус шара, объем которого численно равен его поверхности.

Ответ: 3.

14. Площадь сечения шара равна 80π. Секущая плоскость удалена от центра шара на 8. Найдите объем шара.

Ответ: $2\,304\pi$

15. Линия пересечения сферы и плоскости имеет длину 12π. Найдите расстояние от центра сферы до плоскости, если диаметр сферы равен 16.

Ответ: $2\sqrt{7}$.

16. Плоскости двух сечений шара взаимно перпендикулярны. Одна из них проходит через центр шара, а другая удалена от него на 12, общая хорда сечений равна 18. Найдите площади сечений.

Ответ: 225π; 81π.

17. Вершины прямоугольника лежат на сфере радиуса 10. Найдите расстояние от центра сферы до плоскости прямоугольника, если его диагональ равна 16.

Ответ: 6.

18. Радиус сферы равен 112. Точка, лежащая на плоскости, касательной к сфере, удалена от точки касания на 15. Найдите расстояние от этой точки до ближайшей к ней точки сферы.

Ответ: 1.

19. Сечения шара двумя параллельными плоскостями, между которыми лежит центр шара, имеют площади 144π и 25π. Найдите площадь поверхности шара, если расстояние между параллельными плоскостями равно 17.

Ответ: 676π.

20. Сфера проходит через вершины квадрата $ABCD$, сторона которого равна 12. Найдите расстояние от центра сферы – точки O до плоскости квадрата, если радиус OD образует с плоскостью квадрата угол, равный $60°$.

Ответ: $6\sqrt{6}$.

21. Стороны треугольника ABC касаются шара. Найдите радиус шара, если $AB = 8$, $BC = 10$, $AC = 12$ и расстояние от центра шара O до плоскости треугольника ABC равно $\sqrt{2}$.

Ответ: 3.

22. Чугунное ядро радиусом 1 переплавили в равновеликий конус, образующая которого $\sqrt{6}$. Найдите высоту конуса, если она не менее 1.

Ответ: 2.

23. Алюминиевый шар объемом 36π переплавили в равновеликий конус, образующая которого равна $3\sqrt{5}$. Найдите высоту этого конуса, если она не более 4.

Ответ: 3.

24. 125 одинаковых шариков диаметром 9 сплавили в один шар. Определите радиус получившегося шара.

Ответ: 22,5.

25. Радиусы оснований шарового слоя равны 15 и 7, радиус шара равен 25. Найдите объем шарового слоя, если сечения расположены по разные стороны от центра шара.

Ответ: $\frac{60\,676\,\pi}{3}$.

26. В полушаре радиуса a через середину его высоты проведено сечение, параллельное основанию полушара. Найдите объем полученного шарового слоя.

Ответ: $\frac{11}{24}\pi a^3$.

27. Найдите объем шарового сектора, если радиус шара равен 3, а радиус окружности основания $\sqrt{5}$.

Ответ: 6π.

28. Дан шар, радиус которого равен 13. В нем проведены два взаимно перпендикулярных сечения на расстояниях 4 и 12 от центра. Найдите длину общей хорды сечений.

Ответ: 6.

29. Дан шар. По одну сторону от его центра проведены два параллельных сечения, радиусы которых равны 9 и 12. Найдите объем шара, если расстояние между плоскостями сечений равно 3.

Ответ: $4\,500\pi$.

30. Два равных шара радиуса R расположены так, что центр одного лежит на поверхности другого. Определите длину линии, по которой пересекаются их поверхности.

Ответ: $\sqrt{3}R\pi$.

31. Радиусы двух шаров 25 и 29, а расстояние между их центрами – 36. Определите длину линии, по которой пересекаются их поверхности.

Ответ: 40π.

32. Стороны треугольника: 13; 14; 15. Найдите расстояние от плоскости треугольника до центра шара, касательного к сторонам треугольника. Радиус шара 5.

Ответ: 3.

33. Диагонали ромба 15 и 20. Шаровая поверхность касается всех его сторон. Радиус шара 10. Найдите расстояние от его центра до плоскости ромба.

Ответ: 8.

34. На шар, радиус которого 5, наложен ромб так, что каждая сторона его, равная 6, касается шара. Расстояние от плоскости ромба до центра шара 4. Найдите площадь ромба.

Ответ: 36.

35. Через точку сферы радиуса R, которая является границей данного шара, проведены две плоскости, одна из которых является касательной к сфере, а другая наклонена под углом φ к касательной плоскости. Найдите плошадь сечения данного шара.

Ответ: $R^2 \sin^2 \varphi \, \pi$.

36. Сфера касается граней двугранного угла в $120°$. Найдите расстояние между точками касания, если расстояние от центра сферы до ребра двугранного угла равно a.

Ответ: $\frac{\sqrt{3}}{2}a$.

БЛОК 4. Решите задачи по теме «Тела вращения»:

А

1. Прямоугольник со сторонами $\sqrt{\frac{3}{\pi}}$ и $\sqrt{\frac{27}{\pi}}$ вращается вокруг меньшей стороны. Найдите площадь полной поверхности фигуры вращения.

Ответ: 72.

2. Найдите объем фигуры, полученной вращением равнобедренного прямоугольного треугольника с гипотенузой $3\sqrt{2}$ вокруг своего катета.

Ответ: 9π.

3. Стороны прямоугольника равны 1 и 2 Вычислите отношение площадей полных поверхностей цилиндров, полученных при вращении прямоугольника вокруг осей, содержащих данные стороны.

Ответ: $1:2$.

4. Стороны прямоугольника a и b. Найдите боковую поверхность фигуры, полученной от вращения этого прямоугольника вокруг стороны b.

Ответ: $2ab\pi$.

5. Равносторонний треугольник вращается вокруг своей стороны $a = \frac{2}{\sqrt[3]{\pi}}$. Найдите объем тела вращения.

Ответ: 2.

6. Прямоугольная трапеция вращается вокруг меньшей из непараллельных сторон. Найдите площадь поверхности полученной фигуры вращения, если меньшее основание трапеции равно 2, а боковая сторона длиной 12 образует с основанием угол $60°$.

Ответ: 188π.

B

7. Треугольник, стороны которого 10; 17 и 21, вращается около большей стороны. Найдите объем фигуры вращения.

Ответ: 448π.

8. Определите объем тела, образованного вращением равнобедренного треугольника вокруг боковой стороны, если основание равно 30, а боковая сторона 25.

Ответ: $4\,800\,\pi$

9. Параллелограмм, меньшая диагональ и стороны которого равны соответственно 25; 17 и 28, вращается около большей стороны. Определите поверхность тела вращения.

Ответ: $1\,350\,\pi$.

10. Квадрат со стороной, равной a, вращается вокруг оси, проходящей вне квадрата через его вершину перпендикулярно его диагонали. Найдите поверхность полученного тела.

Ответ: $4\sqrt{2}a^2\pi$.

11. Треугольник с углом $60°$, заключенным между сторонами 8 и 15, вращается вокруг большей из этих сторон. Определите поверхность тела вращения.

Ответ: $84\sqrt{3}\,\pi$.

12. Прямоугольный треугольник с катетами 5 и 12 вращается вокруг прямой, проходящей через вершину большего острого угла параллельно противолежащему катету. Найдите площадь поверхности образовавшегося тела.

Ответ: 210π.

13. Прямоугольная трапеция $NPKM$ ($MN \parallel KP$, $\angle N = 90°$) вращается вокруг оси, содержащей сторону KP. Найдите объем фигуры вращения, если $KP = 2$, диагональ $MP = 6$ и $\angle MPK = 60°$.

Ответ: 72π

14. Параллелограмм, площадь которого равна Q, а большая сторона a, вращается вокруг этой стороны. Найдите объем тела вращения.

Ответ: $\frac{Q^2}{a}\pi$.

15. Прямоугольный треугольник, катеты которого равны 5 и 12, вращается вокруг внешней оси параллельно большему катету, отстоящему от оси на 3. Определите объем тела вращения.

Ответ: 280π.

16. Найдите объем тела, образованного вращением квадрата $ABCD$ $(AB = 1)$ вокруг оси, проходящей через вершину C параллельно диагонали BD.

Ответ: $\sqrt{2}\pi$.

17. Прямоугольный треугольник с катетами 16 и 12 вращается вокруг гипотенузы. Найдите поверхность тела вращения.

Ответ: $268{,}8\pi$.

18. Равнобедренная трапеция с основаниями 12 и 18 и острым углом в $60°$ вращается вокруг меньшего основания. Найдите поверхность тела вращения.

Ответ: $144\sqrt{3}\pi$.

19. Прямоугольный треугольник с катетами, равными 3 и $\sqrt{3}$, вращается вокруг оси, содержащей его гипотенузу. Найдите объем фигуры вращения.

Ответ: $\frac{3\sqrt{3}}{2}\pi$.

20. Равнобедренный треугольник с боковой стороной 10 и углом при вершине $120°$ вращается вокруг оси, содержащей боковую сторону. Найдите объем фигуры вращения.

Ответ: 250π.

БЛОК 5. Решите задачи по теме «Комбинации многогранников и фигур вращения»:

А

1. Куб с ребром, равным $\sqrt{2}$, вписан в шар. Найдите площадь поверхности шара.

Ответ: 6π.

2. В конус вписан шар объемом $\frac{4}{3}\pi$. Найдите объем конуса, если его высота 3.

Ответ: 3π.

3. В цилиндр вписан шар (он касается оснований и боковой поверхности). Во сколько раз высота цилиндра больше его радиуса?

Ответ: в 2 раза.

4. В усеченный конус вписан шар. Радиус верхнего основания конуса равен 3, радиус нижнего основания – 5. Найдите длину образующей и высоту усеченного конуса.

Ответ: 8; $2\sqrt{15}$.

5. В конус с углом $60°$ при вершине осевого сечения вписан шар. Определите радиус шара, если длина образующей равна 4.

Ответ: $\frac{2\sqrt{3}}{3}$.

6. В полусферу радиуса 5 вписан цилиндр с диаметром основания 6. Найдите высоту цилиндра.

Ответ: 4.

7. Измерения прямоугольного параллелепипеда 4; 6; 12. Найдите радиус описанного шара.

Ответ: 7.

8. Основанием прямой призмы служит треугольник со сторонами 6; 8; 10. Высота призмы 24. Найдите радиус описанного шара.

Ответ: 13.

9. В шар вписана правильная четырехугольная пирамида, высота которой делится центром шара на две части: 4 и 5. Найдите объем пирамиды.

Ответ: 54.

10. Высота конуса 8, образующая 10. Найдите радиус вписанного шара.

Ответ: 3.

11. Найдите площадь сферы, вписанной в равносторонний цилиндр, диагональ осевого сечения которого a.

Ответ: $\frac{\pi a^2}{2}$.

12. В куб, площадь полной поверхности которого равна Q, вписана сфера. Найдите площадь сферы.

Ответ: $\frac{\pi Q}{6}$.

13. Высота правильной шестиугольной призмы 8. Диагональ боковой грани 13. Найдите радиус описанного шара.

Ответ: 11.

14. Радиус шара 9. В него вписана правильная четырехугольная призма, высота которой 14. Найдите сторону основания призмы.

Ответ: 8.

15. В цилиндр, радиус основания которого равен 6, вписан конус. Основание конуса совпадает с основанием цилиндра, а вершина конуса совпадает с центром верхнего основания цилиндра. Площадь боковой поверхности конуса равна 60π. Найдите площадь боковой поверхности цилиндра.

Ответ: 96π.

16. В конус с высотой 16 и радиусом основания 12 вписан цилиндр с высотой 10. Найдите радиус основания цилиндра.

Ответ: 4,5.

17. В шар с единичным радиусом вписан конус, образующая которого равна $\sqrt{3}$. Найдите величину угла при вершине осевого сечения конуса.

Ответ: $60°$.

18. В шар вписан конус, осевое сечение которого - равнобедренный прямоугольный треугольник. Какую часть объема шара составляет объем конуса?

Ответ: $\frac{1}{4}$.

19. В равносторонний цилиндр вписан шар. Объем шара $\frac{9\pi}{16}$. Чему равна боковая поверхность цилиндра?

Ответ: $\frac{9\pi}{4}$.

20. Найдите площадь поверхности шара, вписанного в конус с образующей 5 и диаметром основания конуса 6.

Ответ: 9π.

21. Найдите площадь поверхности шара, вписанного в конус, у которого образующая равна 6, а угол при вершине осевого сечения равен $60°$.

Ответ: 12π.

22. В шар вписан конус, высота и радиус основания которого соответственно равны 3 и $3\sqrt{3}$. Найдите радиус шара.

Ответ: 6.

23. В правильную треугольную пирамиду вписан конус. Найдите площадь боковой поверхности этого конуса, если известно, что боковые грани пирамиды наклонены к плоскости основания под углом $60°$ и радиус круга, вписанного в основание пирамиды, равен 16.

Ответ: 512π.

24. Около правильной треугольной пирамиды со стороной основания 6 и высотой 8 описан шар. Найдите радиус шара.

Ответ: 4,75.

25. В цилиндр вписана правильная треугольная призма, сторона основания которой равна a, а боковое ребро – b. Найдите площадь боковой поверхности цилиндра и его объем.

Ответ: $\frac{2\pi}{\sqrt{3}}ab$; $\frac{\pi}{3}a^2 b$.

26. Радиус шара 2. В него вписан равносторонний конус. Найдите полную поверхность конуса.

Ответ: 9π.

27. В данной пирамиде все боковые ребра равны 9, а ее высота 5. Определите радиус описанного шара.

Ответ: 8,1.

28. Найдите радиус шара, описанного около куба, если площадь поверхности куба равна 72.

Ответ: 3.

29. Правильная четырехугольная призма вписана в шар. Найдите высоту призмы, если радиус шара 5, а ребро основания призмы 6.

Ответ: $2\sqrt{7}$.

30. Длина бокового ребра правильной треугольной пирамиды равна $\sqrt{3}$. Боковое ребро составляет с плоскостью основания угол $60°$. Найдите радиус описанного около пирамиды шара.

Ответ: 1.

31. В шар вписан равносторонний конус. Найдите отношение объема шара к объему конуса.

Ответ: $\frac{32}{9}$.

32. В шар вписан равносторонний цилиндр. Найдите отношение объема шара к объему цилиндра.

Ответ: $\frac{4\sqrt{2}}{3}$.

33. Площадь поверхности правильного тетраэдра равна $12\sqrt{3}$ Найдите площадь поверхности конуса, вписанного в этот тетраэдр.

Ответ: 4π .

34. В правильную четырехугольную пирамиду вписан куб. Найдите ребро куба, если высота пирамиды $6\sqrt{2}$, сторона основания пирамиды $4\sqrt{2}$.

Ответ: $2{,}4\sqrt{2}$.

35. В шар, радиус которого 14, вписана правильная треугольная призма; диагональ ее боковой грани 26. Найдите сторону основания призмы.

Ответ: 18.

36. Стороны оснований правильной четырехугольной усеченной пирамиды 7 и 1. Боковое ребро наклонено к основанию под углом в $45°$. Найдите радиус описанного шара.

Ответ: 5.

37. Радиусы оснований усеченного конуса 3 и 4; высота 7. Найдите радиус описанного шара.

Ответ: 5.

38. Определите объем усеченного конуса, описанного около шара, если его образующая равна 13, а радиус шара 6.

Ответ: 532π .

39. Высота правильной четырехугольной пирамиды равна 8, боковое ребро 12. Найдите объем описанного шара.

Ответ: 972π.

40. В прямую треугольную призму, основанием которой служит правильный треугольник со стороной a, вписан шар. Найдите площадь сферы.

Ответ: $\frac{a^2}{3}\pi$.

41. Основанием пирамиды служит правильный треугольник, сторона которого равна 3. Одно из боковых ребер равно 2 и перпендикулярно к основанию. Найдите радиус описанного шара.

Ответ: 2.

42. Объем цилиндра, вписанного в куб, равен 2π. Какова поверхность сферы, описанной около этого куба?

Ответ: 12π.

43. Из деревянной заготовки, представляющей собой равносторонний цилиндр, был выточен наибольшего объема шар. Какой процент материала пошел в отход?

Ответ: $33\frac{1}{3}\%$.

44. Куб пересечен плоскостью, проходящей через середины трех его ребер, исходящих из одной вершины. Площадь сечения равна $16\sqrt{3}$. Какова площадь поверхности шара, вписанного в этот куб?

Ответ: 128π.

45. Около равностороннего конуса описан шар и в него вписан шар. Сколько процентов составляет объем вписанного шара от объема описанного?

Ответ: 12,5%.

46. В правильной усеченной четырехугольной пирамиде площадь верхнего основания равна 50, а площадь нижнего основания 200. Какова поверхность сферы, вписанной в эту пирамиду?

Ответ: 100π.

47. Образующая конуса, вписанного в шар, равна 8, а радиус шара 5. Найдите объем конуса.

Ответ: $49{,}152\pi$.

48. Около куба описан цилиндр. Найдите полную площадь поверхности цилиндра, если поверхность куба равна S.

Ответ: $\frac{\pi S}{6}\left(1+\sqrt{2}\right)$.

49. Из конуса вырезали шар наибольшего объема. Найдите отношение объема срезанной части к объему шара, если осевое сечение конуса – равносторонний треугольник.

Ответ: $\frac{5}{4}$.

50. Площадь основания конуса в 36 раз больше площади основания цилиндра, вписанного в конус. Определите во сколько раз объем конуса больше объема цилиндра, если высота конуса равна 30, а радиус цилиндра 3.

Ответ: в 14,4 раза.

51. Угол между высотой правильной треугольной пирамиды и боковой гранью равен $30°$. Найдите длину стороны основания, если радиус вписанного шара в пирамиду равен 1.

Ответ: 6.

52. Около куба описан шар и в него вписан шар. Во сколько раз объем описанного шара больше, чем объем вписанного?

Ответ: $3\sqrt{3}$.

53. Осевым сечением конуса является равносторонний треугольник со стороной, равной 1. Найдите радиус сферы, касающейся оси конуса, его основания и боковой поверхности.

Ответ: $\frac{\sqrt{3}-1}{4}$.

ГЛАВА X. ЭЛЕМЕНТЫ АНАЛИТИЧЕСКОЙ ГЕОМЕТРИИ И ВЕКТОРНОЙ АЛГЕБРЫ

§1. ДЕКАРТОВЫ КООРДИНАТЫ

БЛОК 1. Решите задачи по теме «Декартовы координаты на плоскости» ·

А

1. Найдите на оси ординат точку, равноудаленную от точек $(-1;1)$ и $(3;5)$.

Ответ: $(0;4)$.

2. Какие из точек $A(5;1)$, $B(6;5)$, $C(6;6)$, $D(-6;-2)$ лежат на окружности $(x+2)^2+(y-5)^2=65$?

Ответ: A; C и D.

3. Напишите уравнение окружности, у которой концы одного диаметра находятся в точках $(-1;6)$ и $(7;-2)$.

Ответ: $(x-3)^2+(y-2)^2=32$.

4. Прямая задана уравнением $4x+3y-24=0$. Найдите координаты середины отрезка AB, где A и B - точки пересечения прямой с осями координат.

Ответ: $(3;4)$.

5. В треугольнике ABC с вершинами в точках $A(2;-1)$, $B(-1;3)$, $C(-3;1)$ проведена медиана AD. Найдите длину этой медианы.

Ответ: 5.

6. В треугольнике ABC с вершинами в точках $A(2;-3)$, $B(-2;3)$ и $C(6;-3)$ проведена средняя линия B_1C_1, параллельная стороне BC. Найдите длину B_1C_1.

Ответ: 5.

7. Составьте уравнение прямой AB, если $A(5;-3)$, $B(-1;-2)$.

Ответ: $x+6y+13=0$.

8. Найдите точку пересечения прямых, заданных уравнениями: $x+2y+3=0$, $4x+5y+6=0$.

Ответ: $(1;-2)$.

9. Найдите x, если расстояние между точками $A(2;3)$ и $B(x;1)$ равно 2.

Ответ: 2.

10. В ΔABC: $A(-1;2)$, $B(5;-10)$, $C(1;-2)$, проведена средняя линия $A_1B_1 \parallel AB$. Составьте уравнение прямой, содержащей среднюю линию.

Ответ: $2x+y=0$.

11. Напишите уравнение окружности, если дан ее центр – точка O и точка A на окружности: $O(-1;2)$, $A(0;5)$.

Ответ: $(x+1)^2+(y-2)^2=10$.

12. Найдите уравнение прямой, проходящей через точку $A(2;-3)$ и параллельной прямой $y=2x-5$.

Ответ: $2x-y-7=0$.

13. Определите вид треугольника ABC, если $A(-3;-2)$, $B(1;4)$, $C(-5;0)$.

Ответ: равнобедренный.

14. Составьте уравнение прямой, содержащей точку $M(7{,}5;\ 8{,}5)$ и точку пересечения прямых $x-y+1=0$, $x+y-8=0$.

Ответ: $x-y+1=0$.

15. На оси Oy найдите точку, равноудаленную от точки $A(-8;-4)$ и от начала координат.

Ответ: $(0;-10)$.

16. Составьте уравнение окружности, зная, что она касается оси Ox в начале координат и пересекает ось Oy в точке $A(0;4)$.

Ответ: $x^2+(y-2)^2=4$.

17. Найдите координаты четвертой вершины прямоугольника $ABCD$, если $A(-1;-1)$, $B(2;4)$ и $C(7;1)$. В ответе укажите сумму координат этой вершины.

Ответ: 0.

18. Найдите угловой коэффициент прямой AB, если $A(-1;2)$, $B(1;5)$.

Ответ: $\frac{3}{2}$.

19. Даны точки: $A(-2;3)$, $B(2;0)$, $C(-2;-3)$. Напишите уравнение прямой, содержащей медиану CM треугольника ABC.

Ответ: $9x-4y+6=0$.

20. Напишите уравнение окружности, касающейся осей координат в точках $(-3;0)$ и $(0;-3)$.

Ответ: $(x+3)^2+(y+3)^2=9$.

21. Найдите расстояние от точки $A(-2;-1)$ до прямой $2x+3y+1=0$.

Ответ: $\frac{6\sqrt{13}}{13}$.

22. Вычислите площадь треугольника, отсекаемого прямой $3x+4y-12=0$ от координатного угла.

Ответ: 6.

В

23. Вершины треугольника – точки $(0;0)$, $(6;4)$, $(10;26)$. Определите длины его медиан.

Ответ: 25; 17; $\sqrt{82}$

24. Найдите центр окружности $x^2+12x+y^2-18y=244$.

Ответ: $(-6;9)$.

25. Окружность с центром $(3;5)$ касается оси абсцисс. В каких точках она пересекает ось ординат?

Ответ: $(0;1)$ и $(0;9)$.

26. Найдите периметр треугольника, ограниченного осями координат и прямой, имеющей уравнение $5x-12y-120=0$.

Ответ: 60.

27. Определите вид четырехугольника $ABCD$, если $A(0;8)$, $B(-6;0)$, $C(2;-6)$, $D(8;2)$.

Ответ: квадрат.

28. Составьте уравнение окружности, проходящей через начало координат и точки $(6;0)$ и $(0;8)$.

Ответ: $(x-3)^2+(y-4)^2=25$.

29. Найдите координаты точек пересечения окружности $x^2+y^2-8x-8y+7=0$ с осью абсцисс.

Ответ: $(7;0)$ и $(1;0)$.

30. Даны координаты вершин трапеции $ABCD$: $A(-2;-2)$, $B(-3;1)$, $C(7;7)$ и $D(3;1)$. Напишите уравнение прямой, содержащей среднюю линию трапеции.

Ответ: $3x-5y+5=0$.

31. Составьте уравнение окружности, касающейся осей координат и прямой $x=-4$.

Ответ: $(x+2)^2+(y\pm 2)^2=4$.

32. Даны точки $A(2;3)$, $B(-2;0)$, $C(2;-3)$. Напишите уравнение окружности, описанной около треугольника ABC.

Ответ: $\left(x-\frac{9}{8}\right)^2+y^2=\left(\frac{25}{8}\right)^2$

33. Прямая $3x+4y-24=0$ пересекает оси Ox и Oy в точках A и B. Найдите длину окружности, вписанной в ΔOAB.

Ответ: 4π.

34. Найдите периметр треугольника, ограниченного осью абсцисс и прямыми $3x-4y=0$ и $15x+8y-168=0$.

Ответ: 28.

35. Даны окружности $x^2-6x+y^2+2y+7=0$ и $x^2+4x+y^2+10y-1=0$. Напишите уравнение прямой, проходящей через центры этих окружностей.

Ответ: $4x-5y-17=0$.

36. Даны точки $A(1;1)$, $B(6;4)$, $C(8;2)$. Найдите площадь ΔABC.

Ответ: 8.

37. Найдите координаты центра тяжести однородной пластинки, имеющей форму треугольника с вершинами $A(-2;1)$, $B(2;-1)$ и $C(4;3)$.

Ответ: $\left(\frac{4}{3};1\right)$.

38. Найдите уравнение серединного перпендикуляра к отрезку AB, если $A(-2;3)$ и $B(1;-4)$.

Ответ: $3x-7y-2=0$.

39. Напишите уравнение окружности, центр которой находится в точке пересечения прямых $2x+3y-13=0$, $x+y-5=0$, если она касается оси ординат.

Ответ: $(x-2)^2+(y-3)^2=4$.

40. На прямой $x+2y-1=0$ найдите точку, равноудаленную от точек $(-2;5)$ и $(0;1)$.

Ответ: $(-3;2)$.

41. Дана окружность с центром в точке $O(6;7)$ и радиусом $r=5$. Из точки $A(7;14)$ к этой окружности проведена касательная. Найдите ее длину.

Ответ: 5.

42. При каком k точки $A(2;1)$, $B(3;-2)$, $C(0;k)$ лежат на одной прямой?

Ответ: $k=7$.

43. Напишите уравнение касательной к окружности $x^2+y^2=5$ в точке $C(1;-2)$.

Ответ: $x-2y-5=0$.

44. Вычислите координаты основания перпендикуляра, опущенного из точки $M(-1;2)$ на прямую $3x-5y-21=0$.

Ответ: $(2;-3)$.

45. Дана окружность $x^2+y^2+4x-6y=0$. Напишите уравнение диаметра, перпендикулярного хорде $2x-3y+13=0$.

Ответ: $3x+2y=0$.

46. Из точки пересечения прямой $3x+5y-15=0$ с осью ординат восстановлен перпендикуляр к этой прямой. Составьте уравнение перпендикуляра.

Ответ: $5x-3y+9=0$.

47. В треугольнике ABC MN - средняя линия, $M \in AB$, $N \in BC$. Найдите координаты точек B и C, если $A(-1;3)$, $M(3;4)$, $N(4;2)$.

Ответ: $B(7;5)$ и $C(1;-1)$.

48. Треугольник ABC задан координатами своих вершин $A(1;2)$, $B(2;-2)$, $C(6;1)$. Составьте уравнение высоты CD.

Ответ: $x-4y-2=0$.

49. Составьте уравнение окружности, описанной около треугольника, стороны которого лежат на прямых $x=0$, $y=0$, $3x+4y-12=0$.

Ответ: $(x-2)^2+\left(y-\frac{3}{2}\right)^2=\frac{25}{4}$.

50. Составьте уравнение биссектрисы AD треугольника ABC, если $A(2;-5)$, $B(5;-1)$, $C(-4;3)$.

Ответ: $x-2=0$.

51. Найдите точки пересечения окружности радиуса $\sqrt{5}$ с центром в точке $(1;-2)$ и прямой $y+1=0$. В ответе укажите меньшую из абсцисс.

Ответ: -1.

52. Напишите уравнение прямой, проходящей через точку $C(1;3)$ и параллельно прямой, проходящей через точки $A(-1;7)$, $B(3;3)$.

Ответ: $x+y-4=0$.

53. Напишите уравнение прямой, соединяющей точку пересечения прямых $2x+3y-8=0$ и $5x-y-3=0$ с точкой пересечения прямых $4x-3y+3=0$ и $x+y-1=0$.

Ответ: $x-y+1=0$.

54. Найдите уравнение общей хорды двух окружностей $x^2+y^2=10$ и $x^2+y^2-10x-10y+30=0$.

Ответ: $x+y-4=0$.

55. Дан треугольник $A(1;2)$, $B(3;7)$, $C(5;-13)$. Вычислите длину перпендикуляра, опущенного из вершины B на медиану, проведенную из вершины A.

Ответ: $\frac{25\sqrt{34}}{34}$.

БЛОК 2. Решите задачи по теме «Декартовы координаты в пространстве»:

А

1. $A(3;-2;-4)$. Найдите сумму расстояний от точки A до оси Oy и от точки A до плоскости xOz.

Ответ: 7.

2. Известны координаты вершин треугольника ABC: $A(2;-1;-3)$, $B(-3;5;2)$, $C(-2;3;-5)$. BM - медиана треугольника ABC. Найдите длину медианы BM.

Ответ: $\sqrt{61}$.

3. Координаты точек: $A(4;-3;2)$, $B(-1;-5;4)$. Найдите сумму координат точки C, лежащей на оси Oy и равноудаленной от точек A и B.

Ответ: $-3,25$.

4. $A(3;1;-4)$. Точка B - симметрична точке A относительно плоскости xOy, а точка C симметрична точке B относительно оси Oy. Найдите расстояние между точками A и C.

Ответ: 6.

5. Точка $A(-3;4;6)$. Точка B - основание перпендикуляра AB, проведенного к оси Oz. C - основание перпендикуляра AC к плоскости xOy. Найдите сумму расстояний AB и AC.

Ответ: 11.

6. Середина отрезка AB лежит на оси Ox. Найдите m и n, если $A(-3;m;5)$, $B(2;-2;n)$.

Ответ: $m=2$; $n=-5$.

7. Найдите расстояние от точки $(1;2;-3)$ до начала координат.

Ответ: $\sqrt{14}$

8. На оси Ox найдите точку $C(x;0;0)$, равноудаленную от двух точек $A(1;2;3)$ и $B(-2;1;3)$.

Ответ: $C(0;0;0)$.

9. Даны один конец отрезка $A(2;3;-1)$ и его середина $C(1;1;1)$. Найдите второй конец отрезка $B(x;y;z)$.

Ответ: $B(0;-1;3)$.

10. $B(-7;\ 4;-3)$. Найдите сумму расстояний от точки B до оси Ox и от точки B до плоскости yOz

Ответ: 12.

11. Точка $B(-6;-3;\ 8)$. Точка C - основание перпендикуляра BC, проведенного к оси Oy. D - основание перпендикуляра BD, проведенного к плоскости xOz. Найдите сумму расстояний BC и BD.

Ответ: 13.

12. $B(-2;5;3)$. Точка C симметрична точке B относительно плоскости xOz, а точка D симметрична точке C относительно Oz. Найдите расстояние между точками B и D.

Ответ: 4.

13. Найдите длину основания равнобедренного треугольника с вершинами в точках $A(2;3;1)$, $B(1;3;3)$ и $C(2;4;3)$.

Ответ: $\sqrt{2}$.

14. Точка B делит отрезок AC в отношении $4:1$. Найдите координаты точки B, если $A(-1;3;2)$, $C(4;13;12)$.

Ответ: $(3;11;10)$.

15. Какая из точек: $A(2;1;5)$ или $B(-2;1;6)$ - лежит ближе к началу координат?

Ответ: точка A.

16. Даны точки $A(-1;2;-2)$ и $B(3;1;2)$. Найдите расстояние от начала координат до середины отрезка AB.

Ответ: $\frac{\sqrt{13}}{2}$.

17. Найдите центр и радиус сферы, заданной уравнением $x^2+y^2+z^2-6y-16=0$.

Ответ: $(0;\ 3;\ 0)$ и $r=5$.

B

18. $CDEF$ - параллелограмм: $C(-4;1;5)$, $D(-5;4;2)$, $E(3;-2;-1)$, $F(x;y;z)$. Найдите координаты точки F и в ответе запишите число, равное $x+y+z$.

Ответ: 1.

19. Точки $A(4;-3;7)$, $B(5;3;8)$ и $D(10;-4;6)$ являются вершинами ромба $ABCD$. Найдите длину диагонали AC.

Ответ: $\sqrt{74}$.

20. Сфера с центром в точке $A(-2;3;-1)$ пересекает ось Oz в точках $B(0;0;z_1)$ и $C(0;0;z_2)$. Найдите z_2, если $z_1=3$.

Ответ: -5.

21. Найдите центр и радиус окружности, по которой сфера $(x-1)^2+(y+2)^2+(z-3)^2=25$ пересекается с плоскостью $x=-3$.

Ответ: $(-3;-2;3)$; $R=3$.

22. Определите вид треугольника ABC, если $A(3;7;-4)$, $B(5;-3;2)$, $C(1;3;-10)$.

Ответ: прямоугольный.

23. Точки $C(4;1;-1)$ и $D(0;5;5)$ делят отрезок AB на три равные части. Найдите длину отрезка AB.

Ответ: $6\sqrt{17}$.

24. Найдите расстояние от точки пересечения медиан треугольника ABC до его вершины B, если $A(0;2;4)$, $B(3;1;2)$, $C(0;0;-3)$.

Ответ: $\sqrt{5}$.

25. Найдите расстояние от точки $M(-5;3;7)$ до сферы $x^2+y^2+z^2=16$.

Ответ: $\sqrt{83}-4$.

26. Найдите площадь сечения сферы $x^2+y^2+(z+4)^2=25$ с плоскостью xOy.

Ответ: 9π.

27. Середина отрезка AB лежит на оси Ox. Найдите m и n, если $A(0;m;n+1)$, $B(1;n;1-m)$.

Ответ: $m=1$; $n=-1$.

28. Найдите координаты точки M, принадлежащей оси Ox, если известно, что расстояние от M до начала координат вдвое меньше, чем расстояние от M до $N(3;-2;1)$.

Ответ: $\left(\dfrac{-3\pm\sqrt{51}}{3};0;0\right)$.

29. Отрезок AB разделен на пять равных частей. Известны координаты первой точки деления $(3; -5; 7)$ и последней $(-2; 4; -8)$. Определите координаты точки A.

Ответ: $\left(\frac{14}{3}; -8; 12\right)$.

30. В кубе $ABCDA_1B_1C_1D_1$ с ребром 1, найдите расстояние от точки D до середины отрезка A_1C_1.

Ответ: $\frac{\sqrt{6}}{2}$.

§2. ВЕКТОРЫ НА ПЛОСКОСТИ И В ПРОСТРАНСТВЕ

БЛОК 1. Решите задачи по теме «Векторы на плоскости»:

А

1. Найдите длину вектора $\overline{a}-\overline{b}$, если: $\overline{a}\left(3;\sqrt{6}\right)$, $\overline{b}\left(-2;-\sqrt{6}\right)$.

Ответ: 7.

2. Даны точки $A(0;0)$, $B(2;2)$, $C(5;-1)$. Найдите скалярное произведение $\overline{AC}\cdot\overline{CB}$.

Ответ: -18.

3. Векторы $\overline{AB}$ и $\overline{CD}$ равны между собой. Зная, что $A(-2;5)$, $B(0;3)$, $D(7;10)$, найдите координаты точки C.

Ответ: $C(5;12)$.

4. Определите угол между векторами $\overline{a}(4;3)$ и $\overline{b}(1;7)$.

Ответ: $45°$.

5. Найдите угол между векторами $\overline{AB}$ и $\overline{AC}$, если $A(1;1)$, $B(3;1)$, $C(2;2)$.

Ответ: $45°$.

6. Даны точки: $A(-2;0)$, $B(2;2)$, $C(4;-2)$, $D(0;-4)$. Найдите длину вектора $\overline{a}=\overline{AB}+3\,\overline{AD}-\frac{1}{2}\overline{CA}$.

Ответ: $\sqrt{290}$.

7. Известно, что $\overline{c}=\overline{a}+\overline{b}$, $\left|\overline{a}\right|=5$, $\left|\overline{b}\right|=3$. Угол между векторами $\overline{a}$ и $\overline{b}$ равен $60°$. Найдите $\left|\overline{c}\right|$.

Ответ: 7.

8. Определите координаты единичного вектора, сонаправленного с вектором $\overline{p}\left(-\sqrt{7};3\right)$.

Ответ: $\left(-\frac{\sqrt{7}}{4};\frac{3}{4}\right)$.

9. Найдите угол A треугольника ABC, если $A(0;1)$, $B\left(\sqrt{3};0\right)$, $C(0;3)$.

Ответ: $120°$.

10. Даны векторы $\overline{a}(4;3)$ и $\overline{b}(m;2)$. При каком значении m эти векторы перпендикулярны?

Ответ: $m=-1{,}5$.

11. $\left|\overline{a}\right|=2$, $\left|\overline{b}\right|=3$, а угол между ними равен $135°$. Вычислите скалярное произведение векторов.

Ответ: $-3\sqrt{2}$.

12. Абсолютная величина вектора $\overline{a}(5;m)$ равна 13, а вектора $\overline{b}(n;24)$ равна 25. Найдите m и n.

Ответ: $m=\pm 12$; $n=\pm 7$.

13. Найдите длину вектора $\overline{a}=3\overline{i}-4\overline{j}$, где $\overline{i}$ и $\overline{j}$ - координатные векторы.

Ответ: 5.

14. Вычислите $\left|\overline{a}+\overline{b}\right|$ и $\left|\overline{a}-\overline{b}\right|$, если $\left|\overline{a}\right|=5$, $\left|\overline{b}\right|=8$, $\angle\left(\overline{a},\overline{b}\right)=60°$.

Ответ: $\sqrt{129}$; 7.

15. Известно, $\angle\left(\overline{a},\overline{c}\right)=\angle\left(\overline{b},\overline{c}\right)=60°$, $\left|\overline{a}\right|=1$, $\left|\overline{b}\right|=\left|\overline{c}\right|=2$. Вычислите $\left(\overline{a}+\overline{b}\right)\overline{c}$.

Ответ: 3.

16. Даны два вектора $\overline{l}(3;-2)$, $\overline{p}(-4;1)$. Найдите координаты вектора $\overline{a}=3\overline{l}-2\overline{p}$.

Ответ: $(17;-8)$.

17. $|\overline{a}|=2\sqrt{2}$, $|\overline{b}|=4$, $\angle(\overline{a},\overline{b})=135°$. Найдите $|\overline{a}+2\overline{b}|$.

Ответ: $2\sqrt{10}$.

18. $\overline{a}(4;-3)$, $\overline{b}(m;-6)$. При каком значении m векторы $\overline{a}$ и $\overline{b}$ коллинеарны?

Ответ: $m=8$.

19. При каком k точки $A(2;1)$, $B(3;-2)$, $C(0;k)$ лежат на одной прямой?

Ответ: $k=7$.

20. При каких значениях m длина вектора $\overline{a}(\sqrt{19};-m)$ равна 10?

Ответ: ± 9.

21. Даны три вектора $\overline{a}(2;3)$, $\overline{b}(7;-7)$ и $\overline{c}(4;-3)$. Найдите угол между векторами $(\overline{a}+\overline{c})$ и $\overline{b}$.

Ответ: $45°$.

22. При повороте вокруг начала координат точка $A(6;8)$ отобразилась в точку $A_1(8;6)$. Найдите косинус угла поворота

Ответ: 0,96.

В

23. Зная, что $\overline{a}(3;5)$, найдите вектор $\overline{b}$, перпендикулярный вектору $\overline{a}$ и с таким же модулем.

Ответ: $\overline{b}(5;-3)$ или $\overline{b}(-5;3)$.

24. Даны векторы $\overline{a}(1;4)$ и $\overline{b}(-3;2)$. Найдите такое число λ, чтобы вектор $(\overline{a}+\lambda\cdot\overline{b})$ был перпендикулярен вектору $\overline{b}$.

Ответ: $-\frac{5}{13}$.

25. При каком значении x векторы $\overline{p}=x\cdot\overline{a}+17\cdot\overline{b}$ и $\overline{q}=3\cdot\overline{a}-\overline{b}$ перпендикулярны, если $|\overline{a}|=2$, $|\overline{b}|=5$ и $\angle(\overline{a},\overline{b})=120°$?

Ответ: 40.

26. Точка M лежит на стороне BC параллелограмма $ABCD$, причем $BM:MC=3:1$. Выразите векторы $\overline{AM}$ и $\overline{MD}$ через векторы $\overline{a}=\overline{AD}$ и $\overline{b}=\overline{AB}$.

Ответ: $\overline{AM}=\frac{3}{4}\overline{a}+\overline{b}$; $\overline{MD}=\frac{1}{4}\overline{a}-\overline{b}$.

27. Дано $|\overline{a}|=3$, $|\overline{b}|=4$, $\angle(\overline{a},\overline{b})=120°$. Найдите косинус угла между векторами $\overline{a}-2\overline{b}$ и $\overline{b}$.

Ответ: $-\frac{19}{2\sqrt{97}}$.

28. Даны координаты вершин треугольника ABC: $A(1;3)$; $B(2;1)$; $C(9;3)$. Найдите $\operatorname{ctg}\angle ACB$.

Ответ: 3,5.

29. В круге проведены диаметр AC и хорда AB. Внутри круга выбрана точка M. От этой точки отложены векторы $\overline{MN}$ и $\overline{MF}$, соответственно равные векторам $\overline{AB}$ и $\overline{AC}$. Чему равен угол MNF?

Ответ: $90°$.

30. В трапеции $PKHM$ (PM и KH - основания) с прямым углом P проведена диагональ HP, $\angle PHK=30°$, $\angle PHM=90°$. Найдите $\left|\overline{KP}+\overline{MK}-\overline{MH}\right|$, если $PM=a$.

Ответ: $\frac{a\sqrt{3}}{2}$.

31. Найдите площадь параллелограмма, построенного на векторах $\overline{a}(1;2)$, $\overline{b}(-3;2)$.

Ответ: 8.

32. Дан ΔABC. O – точка пересечения его медиан. $\overline{AC} = \overline{a}$; $\overline{BC} = \overline{b}$. Выразите вектор $\overline{AO}$ через векторы $\overline{a}$ и $\overline{b}$.

Ответ: $\frac{1}{3}\left(2\overline{a} - \overline{b}\right)$.

33. Найдите площадь параллелограмма с известными координатами вершин $ABCD$: $A(5;4)$, $B(0;3)$, $C(9;8)$, $D(4;7)$.

Ответ: 16.

34. Найдите тангенс угла между векторами $\overline{a}(1;-2)$ и $\overline{b}(3;4)$.

Ответ: -2.

35. Найдите $\left|\overline{a}\right| + \left|\overline{b}\right|$, если $\left|\overline{a} + \overline{b}\right| = 19$, $\left|\overline{a} - \overline{b}\right| = 17$ и $\left|\overline{b}\right| = 10$.

Ответ: 25.

36. Найдите $\left|\overline{b}\right|$, если $\left|\overline{a}\right| = \sqrt{137}$, $\left|\overline{a} + \overline{b}\right| = 20$ и $\left|\overline{a} - \overline{b}\right| = 18$.

Ответ: 15.

37. Найдите $\left|\overline{a} - \overline{b}\right|$, если $\left|\overline{a}\right| = 17$, $\left|\overline{a} + \overline{b}\right| = 28$ и $\left|\overline{b}\right| = 21$.

Ответ: 26.

38. Выразите вектор $\overline{c}$ через векторы $\overline{a}$ и $\overline{b}$, если $\overline{a}(5;4)$, $\overline{b}(-3;0)$, $\overline{c}(19;8)$.

Ответ: $\overline{c} = 2\overline{a} - 3\overline{b}$.

39. Выразите вектор $\overline{c}$ через векторы $\overline{a}$ и $\overline{b}$, если $\overline{a}(-6;2)$, $\overline{b}(4;7)$, $\overline{c}(9;-3)$.

Ответ: $\overline{c} = -\frac{3}{2}\overline{a}$.

40. Отрезок CM - медиана, проведенная из вершины прямого угла равнобедренного треугольника ABC. Найдите $\left|\overline{AB}-\overline{AC}+\overline{BM}\right|$, если $AB=10$.

Ответ: 5.

БЛОК 2. Решите задачи по теме «Векторы в пространстве»:

А

1. Даны координаты точек: $A(-3;2;-1)$, $B(2;-1;-3)$, $C(1;-4;3)$, $D(-1;2;-2)$. Найдите $\left|2\overline{AB}+3\overline{CD}\right|$.

Ответ: $\sqrt{521}$.

2. Даны координаты точек $C(3;-2;1)$, $D(-1;2;1)$, $M(2;-3;3)$, $N(-1;1;-2)$. Найдите косинус угла между векторами $\overline{CD}$ и $\overline{MN}$.

Ответ: 0,7.

3. Вычислите угол между векторами $\overline{a}(2;-2;0)$ и $\overline{b}(3;0;-3)$.

Ответ: 60°.

4. При каком значении n данные векторы перпендикулярны: $\overline{a}(2;-1;3)$ и $\overline{b}(1;3;n)$?

Ответ: $\frac{1}{3}$.

5. Вычислите координаты вектора $\left(2\overline{a}+3\overline{b}+\overline{c}\right)$ по координатам векторов: $\overline{a}(3;1;1)$, $\overline{b}(-2;0;2)$, $\overline{c}(1;-1;0)$.

Ответ: $(1;\ 1;\ 8)$.

6. Вычислите значение k, при котором скалярное произведение векторов $\overline{a}(2;k;-1)$ и $\overline{b}(3;-1;2k)$ равно (-5).

Ответ: $\frac{11}{3}$.

7. Даны векторы: $\bar{a}(-3;-1;2)$, $\bar{c}(5;-2;7)$. Найдите координаты вектора: $3\bar{c}-\bar{a}$.

Ответ: $(18;-5;19)$.

8. При каких значениях x и y векторы $\bar{a}(x;-2;5)$ и $\bar{b}(1;y;-3)$ коллинеарны?

Ответ: $x=-\frac{5}{3}$; $y=\frac{6}{5}$.

9. Вычислите длину вектора $2\bar{a}+3\bar{b}$, если $\bar{a}(3;1;0)$, $\bar{b}(0;1;-1)$.

Ответ: $\sqrt{70}$.

10. Даны две точки: $A(2;-1;3)$, $B(1;0;4)$ и вектор $\bar{a}(4;-2;-3)$. Найдите длину вектора $3\overline{AB}+5\bar{a}$.

Ответ: $\sqrt{482}$.

11. Даны точки $A(2;0;1)$, $B(4;-1;3)$, $C(1;1;2)$. Найдите косинус внутреннего угла при вершине B треугольника ABC.

Ответ: $\frac{5\sqrt{14}}{21}$.

12. Найдите сумму всех значений m, при которых векторы $\bar{a}(m+1;\ 1;\ -1)$ и $\bar{b}(m;\ -m;\ -2m+3)$ перпендикулярны.

Ответ: -2.

13. Найдите длину большей диагонали параллелограмма, построенного на векторах $\bar{a}(3;-3;-2)$ и $\bar{b}(1;2;-1)$.

Ответ: $\sqrt{30}$.

14. Найдите в градусах угол между векторами $\bar{a}(1;1;\sqrt{6})$ и осью Oz.

Ответ: $30°$.

15. Даны векторы $\overline{a}(-1;1;1)$, $\overline{b}(0;2;-2)$. Найдите координаты вектора $\overline{c}=\left(2\overline{a}+3\overline{b}\right)-\left(\overline{a}-2\overline{b}\right)+2\left(\overline{a}-\overline{b}\right)$.

Ответ: $(-3;9;-3)$.

16. Найдите значения m и n, при которых следующие векторы коллинеарны: $\overline{a}(15;m;1)$ и $\overline{b}(18;12;n)$.

Ответ: $m=10$; $n=1{,}2$.

17. Даны векторы $\overline{a}=m\cdot\overline{i}+3\overline{j}+4\overline{k}$ и $\overline{b}=4\overline{i}+m\cdot\overline{j}-7\overline{k}$. При каком значении m векторы $\overline{a}$ и $\overline{b}$ ортогональны?

Ответ: 4.

18. Даны векторы $\overline{a}(-1;2;3)$ и $\overline{b}(5;x;-1)$. При каком значении x выполняется условие $\overline{a}\cdot\overline{b}=3$?

Ответ: 5,5.

19. Вершины треугольника ABC имеют координаты $A(-2;0;1)$, $B(-1;2;3)$ и $C(8;-4;9)$. Найдите координаты вектора $\overline{BM}$, если BM - медиана треугольника ABC.

Ответ: $(4;-4;2)$.

20. Даны вершины треугольника: $A(-1;-2;4)$, $B(-4;-2;0)$ и $C(3;-2;1)$. Найдите угол треугольника при вершине A.

Ответ: $90°$.

21. Вычислите $\overline{a}\cdot\overline{b}+\overline{b}\cdot\overline{c}+\overline{c}\cdot\overline{a}$, если $\overline{a}+\overline{b}+\overline{c}=0$ и $\left|\overline{a}\right|=\left|\overline{b}\right|=\left|\overline{c}\right|=1$.

Ответ: $-1{,}5$.

22. Вычислите длину вектора $\overline{b}=2\overline{i}+\overline{j}-3\overline{k}$.

Ответ: $\sqrt{14}$.

23. Найдите косинус угла между векторами $\bar{a}-\bar{b}$ и $\bar{a}+\bar{b}$, если $\bar{a}(1;2;1)$ и $\bar{b}(2;-1;0)$.

Ответ: $\frac{1}{11}$.

24. Найдите скалярное произведение векторов $\bar{a}$ и $\bar{b}$, если $|\bar{a}|=1$, $|\bar{b}|=2$, $|\bar{a}+\bar{b}|=3$.

Ответ: 2.

25. Найдите угол между векторами $\bar{p}=2\bar{a}+3\bar{b}$ и $\bar{q}=2\bar{a}-3\bar{b}$, если $\bar{a}=\bar{i}-\bar{j}+2\bar{k}$ и $\bar{b}=2\bar{i}+2\bar{j}$.

Ответ: $120°$.

26. В параллелограмме $ABCD$ заданы $\overline{AB}(-4;-4;-2)$, $\overline{CB}(-3;-6;1)$ и $A(3;8;-5)$. Найдите сумму координат точки пересечения диагоналей.

Ответ: 5.

27. Длина вектора $\bar{a}(x;y;z)$ равна 5. Найдите ординату вектора $\bar{a}$, если $x=2$, $z=-\sqrt{5}$.

Ответ: ± 4.

28. Даны три точки $A(1;0;1)$, $B(-1;1;2)$ и $C(0;2;-1)$. Найдите точку $D(x;y;z)$, если векторы $\overline{AB}$ и $\overline{CD}$ равны.

Ответ: $D(-2;3;0)$.

B

29. При каком значении (значениях) k векторы $\bar{a}(6-k;\ k;\ 2)$ и $\bar{b}(-3;\ 5+5k;\ -9)$ перпендикулярны?

Ответ: 2; $-3{,}6$.

30. При каком значении a векторы $\overline{AB}$ и $\overline{CD}$ коллинеарны, если $A(-2;-1;2)$, $B(4;-3;6)$, $C(-1;\ a-1;\ 1)$, $D(-4;-1;a)$?

Ответ: -1.

31. Дано: $|\overline{a}|=4$, $|\overline{b}|=1$, $\angle(\overline{a},\overline{b})=60°$. Найдите $\cos\alpha$, где α - угол между векторами $\overline{a}-\overline{b}$ и $\overline{b}$.

Ответ: $\frac{1}{\sqrt{13}}$.

32. Найдите длину вектора $\overline{a}+\overline{b}-\overline{c}$, если $|\overline{a}|=1$, $|\overline{b}|=2$, $|\overline{c}|=3$, $\angle(\overline{a},\overline{b})=90°$, $\angle(\overline{b},\overline{c})=60°$, $\angle(\overline{a},\overline{c})=120°$.

Ответ: $\sqrt{11}$.

33. В параллелограмме $ABCD$ заданы $\overline{CD}(-3;4;2)$, $\overline{CB}(5;-2;4)$ и $A(5;8;0)$. Найдите расстояние от точки C до начала координат.

Ответ: 9.

34. Точки $A(14;-8;-1)$, $B(7;3;-1)$, $C(-6;4;-1)$, $D(1;-7;-1)$ являются вершинами ромба $ABCD$. Найдите острый угол ромба.

Ответ: $\arccos\frac{3}{5}$.

35. Дан параллелепипед $ABCDA_1B_1C_1D_1$. Найдите вектор, равный сумме $\overline{AB}+\overline{B_1C_1}+\overline{DD_1}+\overline{CD}$.

Ответ: $\overline{AD_1}$.

36. Дан треугольник с вершинами в точках $A(3;-2;1)$, $B(3;0;2)$, $C(1;2;5)$. Найдите угол, образованный медианой BD и основанием AC.

Ответ: $45°$.

37. В правильном тетраэдре $DABC$ с ребром a точка O - центр треугольника ABC. Найдите $\left|\overline{DA}+\overline{AC}-\overline{OC}\right|$.

Ответ: $\dfrac{a\sqrt{6}}{3}$.

38. Даны три точки: $A(1;0;1)$, $B(-1;1;2)$, $C(0;2;-1)$. Найдите на оси Oz такую точку $D(0;0;c)$, чтобы векторы $\overline{AB}$ и $\overline{CD}$ были перпендикулярны.

Ответ: $c=1$.

39. В тетраэдре $DABC$ $DA=DB=DC$, $\angle ADB=45°$, $\angle BDC=60°$. Вычислите угол между векторами:

1) $\overline{DA}$ и $\overline{BD}$; 2) $\overline{DB}$ и $\overline{CB}$.

Ответ: 1) $135°$; 2) $60°$.

40. $ABCDA_1B_1C_1D_1$ - куб. Найдите вектор, равный $\overline{AA_1}-\overline{DC_1}+\overline{BC}$.

Ответ: $\overline{BD}$.

41. При каком значении a три точки $A(2;a;3)$, $B(3;1;6)$, $C(4;3;9)$ лежат на одной прямой?

Ответ: $a=-1$.

42. Найдите длину интервала значений параметра a, при которых $\overline{p}\left(-1;\ 2x;\ x^2\right)$ и $\overline{q}\left(5;\ a;\ a\right)$ при любом x образуют тупой угол.

Ответ: 5.

43. Найдите длину вектора $\overline{a}-\overline{b}-\overline{c}$, если $\left|\overline{a}\right|=2$, $\left|\overline{b}\right|=3$, $\left|\overline{c}\right|=4$, угол между $\overline{a}$ и $\overline{b}$ равен $60°$, между $\overline{b}$ и $\overline{c}$ равен $90°$ и между $\overline{a}$ и $\overline{c}$ равен $120°$.

Ответ: $\sqrt{31}$.

44. Векторы $\overline{a}$ и $\overline{b}$ взаимно перпендикулярны, вектор $\overline{c}$ образует с ними угол $\frac{\pi}{3}$. Зная, что $\left|\overline{a}\right|=3$, $\left|\overline{b}\right|=5$ и $\left|\overline{c}\right|=8$, вычислите скалярное произведение $\left(3\overline{a}-2\overline{b}\right)\cdot\left(\overline{b}+3\overline{c}\right)$.

Ответ: -62.

45. Треугольная пирамида задана координатами своих вершин $A(3;0;1)$, $B(-1;4;1)$, $C(5;2;3)$ и $D(0;-5;4)$. Вычислите длину вектора $\overline{AO}$, если O - точка пересечения медиан треугольника BCD.

Ответ: $\frac{\sqrt{51}}{3}$.

46. $\left|\overline{a}\right|=2$, $\left|\overline{b}\right|=3$, $\angle\left(\overline{a},\overline{b}\right)=120^\circ$. Найдите $\cos\varphi$, где φ - угол между векторами $\overline{a}$ и $\overline{a}+\overline{b}$.

Ответ: $\frac{\sqrt{7}}{14}$.

47. $ABCDA_1B_1C_1D_1$ - параллелепипед; $\overline{AD}=\overline{a}$, $\overline{AB}=\overline{b}$, $\overline{AA_1}=\overline{c}$. Выразите через векторы $\overline{a}$, $\overline{b}$, $\overline{c}$ вектор $\overline{MK}$, где K - середина AD и M - середина CC_1.

Ответ: $-\frac{1}{2}\overline{a}-\overline{b}-\frac{1}{2}\overline{c}$.

48. Треугольник задан координатами своих вершин $A(1;1;2)$, $B(3;4;2)$ и $C(5;6;4)$. Найдите величину внешнего угла треугольника при вершине B.

Ответ: $\arccos\left(\frac{5}{\sqrt{39}}\right)$.

49. В треугольнике ABC точки M и N - середины сторон AB и BC соответственно. Известно, что $\overline{AB}(3;-5;6)$, $\overline{MN}(-2;1;7)$. Найдите сумму координат вектора $\overline{BC}$.

Ответ: 8.

50. Найдите сумму целых значений параметра b, при которых векторы $\overline{p}\left(x^2;\ x;\ 16\right)$ и $\overline{q}\left(1;\ b;\ -\frac{1}{b}\right)$ при всех значениях x образуют острый угол.

Ответ: -6.

ГЛАВА XI. ЛОГИЧЕСКИЕ ЗАДАЧИ

БЛОК 1. Решите логические задачи:

1. Сколько ударов сделают часы в течение суток, если они отбивают только число целых часов от 1 до 12?

Ответ: 156.

2. На прямой взяли 7 точек. Сколько всего получилось отрезков концами которых являются эти точки?

Ответ: 21.

3. Вычислите: 999^2.

Ответ: 998 001.

4. Сколько диагоналей имеет выпуклый двенадцатиугольник?

Ответ: 54.

5. Вычислите: $\frac{1}{1\cdot 2}+\frac{1}{2\cdot 3}+\frac{1}{3\cdot 4}+...+\frac{1}{99\cdot 100}$.

Ответ: $\frac{99}{100}$.

6. Найдите сумму всех возможных натуральных значений дроби $\frac{n^3-4n^2-12}{n}$ $(n\in\mathbb{N})$.

Ответ: 105.

7. Вычислите: $7,352^2+52,96-2,648^2$.

Ответ: 100.

8. У призмы всего 60 ребер. Сколько у нее граней?

Ответ: 22.

9. Сколькими нулями оканчивается произведение всех целых чисел от 1 до 50?

Ответ: 12.

10. Какую цифру надо приписать справа к числу 752, чтобы вновь полученное четырехзначное число делилось нацело на 36?

Ответ: 4.

11. Дано несколько натуральных чисел, сумма которых равна 75. Если каждое из этих чисел уменьшить на 2, то сумма новых чисел будет равна 61. Сколько чисел было дано?

Ответ: 7.

12. Даны 7 точек. Никакие три из них не лежат на одной прямой. Сколько всего различных прямых можно провести через эти 7 точек?

Ответ: 21.

13. Вычислите: $\left(1-\frac{1}{2^2}\right)\left(1-\frac{1}{3^2}\right)...\left(1-\frac{1}{100^2}\right)$.

Ответ: $\frac{101}{200}$.

14. Анвару воды в бурдюке хватает на 20 дней, а его брату на 60 дней. На сколько дней хватит воды в том же бурдюке с братом на двоих?

Ответ: 15.

15. Найдите последнюю цифру числа: 8^{99}.

Ответ: 2.

16. Найдите сумму цифр числа: $31323334...7980$.

Ответ: 480.

17. Найдите последнюю цифру числа: 7^{100}.

Ответ: 1.

18. Поезд, длина которого 400 *м*, проехал туннель длиной 800 *м* за 1 *мин*. Найдите скорость поезда.

Ответ: 20 *м/с*.

19. На сколько градусов поворачивается минутная стрелка часов за 9 минут?

Ответ: $54°$.

20. При каких цифрах n число $7851n$ делится на 9?

Ответ: 6.

21. Вычислите: $100^2 - 97^2 + 96^2 - 93^2 + 92^2 - 89^2 + ... + 4^2 - 1$.

Ответ: 7 575.

22. Из цифр 3, 6, 7 и 9, не повторяя их, составлены всевозможные четырехзначные числа. Сколько среди них чисел, которые делятся на 4 нацело?

Ответ: 6.

23. Найдите сумму: $\frac{2}{5 \cdot 7} + \frac{2}{7 \cdot 9} + \frac{2}{9 \cdot 11} + ... + \frac{2}{73 \cdot 75}$.

Ответ: $\frac{14}{75}$.

24. На сколько уменьшится сумма $1 \cdot 4 + 2 \cdot 8 + 3 \cdot 12 + ... + 20 \cdot 80$, если второй множитель каждого слагаемого уменьшить на единицу?

Ответ: 210.

25. В записи $3*470$ заменить звездочку такой цифрой, чтобы получилось число, делящееся на 45 без остатка.

Ответ: 4.

26. На какое из следующих чисел делится нацело число $7^6 - 27$:

51; 49; 45; 23; 13.

Ответ: 23.

27. Вычислите: $2\,001 \cdot 2\,004 - 2\,002 \cdot 2\,003$.

Ответ: -2.

28. Какое наименьшее число прямоугольников с измерениями 8 и 20 надо взять, чтобы из них можно было бы сложить квадрат?

Ответ: 10.

29. В полдень минутная и часовая стрелки совпали Когда они совпадут в следующий раз?

Ответ: в 13 *ч* $5\frac{5}{11}$ *мин.*

30. В штате гаража числится 54 шофера. Найдите количество свободных дней, которые может иметь каждый шофер в месяц (30 дней), если ежедневно 25% автомашин, из имеющихся 60, остаются в гараже для профилактического ремонта.

Ответ: 5 *дней.*

31. Через каждую вершину выпуклого многоугольника проходит 5 диагоналей. Найдите число сторон многоугольника.

Ответ: 8.

32. Какую цифру можно поставить вместо звездочки в записи грехзначного числа $46*$, чтобы получившееся число делилось на 2, 3, 6, 9 одновременно?

Ответ: 8.

33. В семье четверо детей. Трое из них соответственно на 2, 6, 8 лет старше самого младшего, причем возраст каждого ребенка в годах выражается простым числом. Сколько лет старшему?

A) 7 B) 11 C) 13 D) 15 E) 17

Ответ: C.

34. Какой цифрой оканчивается сумма: 13^5+11^5?

Ответ: 4.

35. Найдите наибольшее из чисел:

A) $\frac{1-\sqrt{3}}{\sqrt{5}\left(3+\sqrt{7}\right)}$ B) $\frac{116}{231}$ C) $\frac{338}{675}$ D) $\frac{12}{23}$ E) $\frac{112}{223}$

Ответ: D.

36. В коробке 10 красных, 8 синих, 8 зеленых и 4 желтых карандаша. Сколько карандашей как минимум нужно взять из коробки, чтобы среди них обязательно было 4 карандаша одного цвета?

Ответ: 13 карандашей.

37. Средний возраст 11 футболистов, игравших на поле, равен 22 годам. После того, как одного игрока удалили, средний возраст оставшихся игроков стал 21 год. Сколько лет удаленному игроку?

Ответ: 32 года.

38. Деревянный окрашенный куб с ребром 3 см распилили на кубические сантиметры. Сколько среди них кубиков, которые окрашены с трех сторон?

Ответ: 8.

39. Если на прямой, через равные промежутки, поставить 10 точек, то они займут отрезок длиной l, если же 100 точек, то отрезок длиной k. Во сколько раз k больше l?

Ответ: в 11 раз.

40. Через железнодорожную станцию прошли три военных состава. В первом находилось 462 солдата, во втором – 546 и в третьем – 630. Сколько вагонов было в каждом составе, если известно, что в каждом вагоне находилось одинаковое число солдат и что это число было максимальное из всех возможных?

Ответ: 11; 13; 15.

41. Определите наименьший из углов, которые составляют часовая и минутная стрелки в 6 *ч* 10 *мин*.

Ответ: $\frac{25\pi}{36}$.

СОДЕРЖАНИЕ

По вопросам **оптового** приобретения книг можно обращаться по телефонам:

+7 (727) 270 - 68 - 35

+7 - 777 - 805 - 26 - 35

+7 - 777 - 496 - 25 - 14

ИРИНА ПАВЛОВНА РУСТЮМОВА
СВЕТЛАНА ТЮЛЮГОНОВНА РУСТЮМОВА

Тренажер по математике
для подготовки к единому национальному тестированию
(ЕНТ)

Часть 3

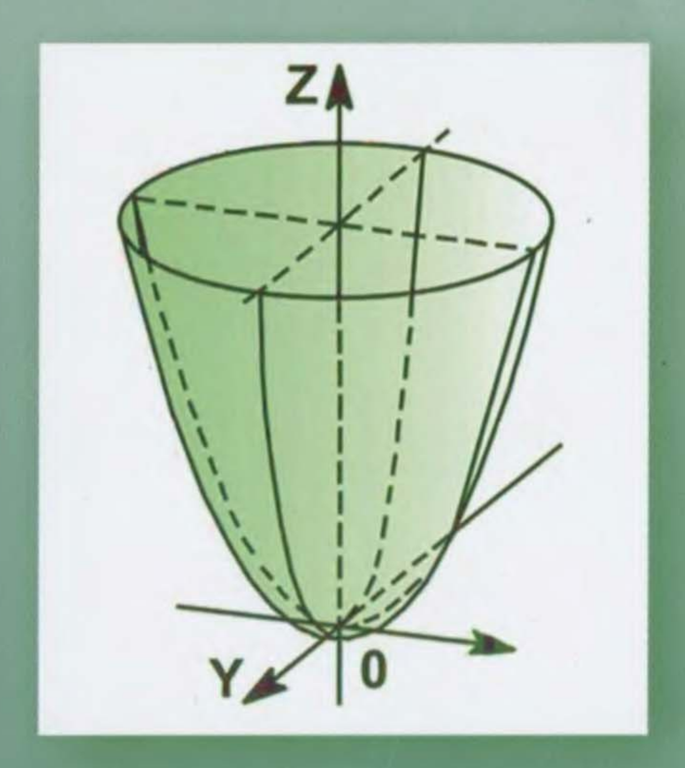
Подписано в печать 22.02.2013. Печать офсет.
Формат изд. 60x84/16
Объем 25 усл. печ. л. Тираж 1000 экз.

Отпечатано в типографии «ИП Волкова»
Райымбека 212/1, оф. 319
Тел.: 8(727)330-03-12, 8(727)330-03-13

И.П. Рустюмова
С.Т. Рустюмова

ТРЕНАЖЕР ПО МАТЕМАТИКЕ

ДЛЯ ПОДГОТОВКИ К ЕДИНОМУ НАЦИОНАЛЬНОМУ ТЕСТИРОВАНИЮ (ЕНТ)



Часть 3

ИЗДАНИЕ ПЕРВОЕ

Часть 3

И.П. Рустюмова
С.Т. Рустюмова

ТРЕНАЖЕР ПО МАТЕМАТИКЕ ДЛЯ ПОДГОТОВКИ К ЕДИНОМУ НАЦИОНАЛЬНОМУ ТЕСТИРОВАНИЮ (ЕНТ)

